Краткое руководство к действию по тензорной алгебре в примерах и задачах.

12 декабря 2012 г.

Глава 1. Тензорная алгебра вещественного векторного пространства.

§1.1. Предварительные сведения из линейной алгебры.

1.1. Пусть V – непустое множество произвольной природы.

Определение 1.1. Будем называть множество V *вещественным векторным пространством (или, просто, векторным пространством или вещественным линейным пространством)*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $X, Y \in V$ ставит в соответствие элемент $Z \in V$, называемый *суммой векторов* X *и* Y и обозначаемый $Z = X + Y$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $X \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $Y \in V$, называемый *произведением вектора* X *на число* λ и обозначаемый $Y = \lambda X$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $X + Y = Y + X$ (коммутативность);

2^0. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $X \in V$ выполняется $X + 0 = X$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $X \in V$ существует элемент $-X \in V$, такой что $X + (-X) = 0$ (элемент $-X$ называется *противоположным* элементу X);

5^0. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$;

6^0. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

7^0. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$;

8^0. $1X = X$,

где $X, Y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства.* Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на вещественное число.*

Если в векторном пространстве V существует система из n линейно независимых векторов $(e_1, \ldots, e_n)$, такая что для любого вектора $X \in V$ имеем $X = X^1 e_1 + \ldots + X^n e_n$, то векторное пространство V называется *n-мерным*, а система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ – *базисом* V. Числа $(X^1, \ldots, X^n)$ называются *координатами* вектора в данном базисе.

В дальнейшем мы будем работать только с n-мерными векторными пространствами, не оговаривая это дополнительно.

Замечание 1.1. В дальнейшем нам часто придется использовать суммы от 1 до некоторого фиксированного числа. Будем обозначать сумму следующим образом:

$$\alpha^1 a_1 + \ldots + \alpha^n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i a_i$$

Чтобы еще сократить запись, договоримся, что по одинаковым верхнему и нижнему индексам производится суммирование от 1 до этого числа:

$$\alpha^i a_i = \alpha^1 a_1 + \ldots + \alpha^n a_n.$$

Индекс, обозначающий суммирование, называется *индексом суммирования.* Индекс суммирования можно обозначать любой буквой. Например, $\alpha^i a_i \equiv \alpha^j a_j \equiv \alpha^k a_k = \ldots$. Введенная договоренность об обозначении суммирования называется *правилом суммирования Эйнштейна.*

Заметим, что для того чтобы иметь возможность использовать правило суммирования Эйнштейна, в определении координат вектора мы пишем номер координаты сверху.

Также договоримся о сокращенной записи систем равенств. Пусть дана система равенств

$$\begin{cases} b_1 = b_1^1 a_1 + \ldots + b_1^n a_n \\ \ldots \\ b_m = b_m^1 a_1 + \ldots + b_m^n a_n. \end{cases}$$

Будем записывать такую систему в виде $b_p = b_p^i a_i$, $(i = 1, \ldots, n; p = 1, \ldots, m)$. Индекс, не являющийся индексом суммирования, называется *свободным индексом.* В данном примере индекс p является свободным индексом. При использовании свободного индекса будем указывать, в каких пределах он изменяется.

1.2. Напомним определение линейного оператора.

Определение 1.2. *Линейным оператором* на векторном пространстве V называется отображение $L : V \to V$ удовлетворяющее условию *линейности*, то есть

$$L(\alpha X + \beta Y) = \alpha L(X) + \beta L(Y),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – произвольные числа, $X, Y \in V$ – произвольные векторы.

Пусть дан линейный оператор L. Если в векторном пространстве V фиксирован базис $E = (e_1, \ldots, e_n)$, то оператор L однозначно определяется своей матрицей (L_j^i), $i, j = 1, \ldots, n$. Напомним, что числа L_j^i получаются следующим образом. Рассмотрим вектор e_j из базиса E и подействуем на него оператором L. В результате мы получим вектор $L(e_j)$, который разложим по базису E:

$$L(e_j) = L_j^i e_i. \tag{1.1}$$

Таким образом, числа L_j^i суть координаты векторов $L(e_j)$ в базисе E. В матрицу координаты векторов $L(e_j)$ записываются по столбцам.

С помощью матрицы линейного оператора можно выразить результат действия этого оператора на произвольный вектор пространства V. Пусть дан вектор $X \in V$. Обозначим его координаты в базисе E через $(X^1, \ldots, X^n)$. Тогда

$$L(X) = L(X^i e_i) = X^i L(e_i) = X^i L_i^k e_k. \tag{1.2}$$

Здесь мы воспользовались линейностью оператора L и формулой (1.1) (в формуле мы заменили индекс j на i, а индекс i – на k). В частности, мы получили, что координаты вектора $L(X)$ в базисе E имеют вид $(L_i^1 X^i, \ldots, L_i^n X^i)$.

1.3. Пусть даны два базиса $E = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Выведем формулы преобразования координат произвольного вектора X при переходе от базиса E к базису $\tilde{E}$.

Пусть

$$\varepsilon_i = C_i^j e_j, \tag{1.3}$$

то есть C_i^j – это j-я координата i-го вектора ε_i в базисе E. Координаты векторов ε_i записывают по столбцам в матрицу C, которая называется *матрицей перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$.*

Обозначим координаты вектора X в базисе E через (X^i), $i = 1, \ldots, n$, а базисе $\tilde{E}$ – через $(\tilde{X}^i)$. Тогда по определению координат вектора получим

$$X^j e_j = X = \tilde{X}^i \varepsilon_i = \tilde{X}^i C_i^j e_j.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим *формулы преобразования координат вектора* при переходе от одного базиса к другому

$$X^j = C_i^j \tilde{X}^i \tag{1.4}$$

Замечание 1.2. Из полученной формулы нам хотелось бы выразить координаты $\tilde{X}^i$. Для этого заметим, что соотношение (1.4) можно записать в матричной форме в виде $X = C\tilde{X}$, где X – столбец из координат вектора X в базисе E, C – матрица перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$, $\tilde{X}$ – столбец из координат вектора X в базисе $\tilde{E}$ (здесь мы вспомнили правило умножения матриц "строка на столбец"). Чтобы выразить столбец $\tilde{X}$, нам нужно полученное матричное равенство умножить слева на матрицу обратную матрице C. Будем обозначать такую матрицу $C^{-1} = ((C^{-1})_j^i)$: $C^{-1}X = \tilde{X}$. От этого равенства нам нужно вернуться обратно к "координатному соотношению". Для этого опять вспоминаем правило из алгебры умножения матриц "строка на столбец"и видим, чтобы получить i-й элемент в столбце $\tilde{X}$, нужно элементы i-ой строки матрицы C^{-1} умножить на элементы столбца X и результаты сложить:

$$\tilde{X}^i = (C^{-1})_j^i X^j. \tag{1.5}$$

Из проведенного рассуждения вытекает следующее правило: чтобы выразить $\tilde{X}^i$ из равенства (1.4), нужно найти свободный индекс у элемента матрицы C (в нашем случае это индекс j), умножить каждое из равенств на элемент $(C^{-1})^k_j$ и сложить полученные равенства:

$$(C^{-1})^k_j X^j = (C^{-1})^k_j C^j_i \tilde{X}^i \tag{1.6}$$

Рассмотрим выражение $(C^{-1})^k_j C^j_i$. Это элемент k-ой строки i-го столбца матрицы, равной произведению матриц C^{-1} и C, то есть 1, если $k = i$ и 0 в противном случае. Такую величину обозначают следующим образом

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, \text{если}\, k = i; \\ 0, \text{если}\, k \neq i. \end{cases}$$

и называют *дельтой Кронекера или символом Кронекера.* С учетом этого обозначения из (1.6) получим

$$(C^{-1})^k_j X^j = \delta^k_i \tilde{X}^i.$$

Нам осталось вычислить $\delta^k_i \tilde{X}^i = \delta^k_1 X^1 + \ldots + \delta^k_n X^n$. Это сумма, в которой все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Отличным от нуля будет слагаемое, в котором индекс суммирования i принимает значение k, то есть $\delta^k_i \tilde{X}^i = \tilde{X}^k$. Итак, окончательно, равенство (1.6) принимает вид

$$(C^{-1})^k_j X^j = \tilde{X}^k.$$

Это выражение совпадет с (1.5), если переобозначить k на i. (Обратите внимание, что свободный индекс мы можем обозначать любой буквой, но заменять его нужно во всем выражении.)

Аналогичным образом получим соотношения между элементами матриц линейного оператора L. Обозначим (L^i_j) матрицу линейного оператора в базисе E и через $\tilde{L}^i_j$ матрицу оператора L в базисе $\tilde{E}$. Тогда

$$L(\varepsilon_i) = \tilde{L}^j_i \varepsilon_j = \tilde{L}^j_i C^k_j e_k; \quad L(\varepsilon_i) = L(C^j_i e_j) = C^j_i L(e_j) = C^j_i L^k_j e_k.$$

Здесь мы использовали линейность оператора L и формулы (1.3), (1.1). Таким образом, $(\tilde{L}^j_i C^k_j - C^j_i L^k_j) e_k = 0$. В силу линейной независимости базисных векторов имеем $\tilde{L}^j_i C^k_j = C^j_i L^k_j$. Выразим $\tilde{L}^j_i$ (см. замечание 1.2): $\tilde{L}^j_i C^k_j (C^{-1})^t_k = C^j_i L^k_j (C^{-1})^t_k$ или

$$\tilde{L}^t_i = C^j_i (C^{-1})^t_k L^k_j. \tag{1.7}$$

§1.2. Ковекторы.

Пусть V – векторное пространство.

Определение 1.3. Рассмотрим отображение $u : V \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $X \in V$ ставит в соответствие число $\alpha \in \mathbb{R}$. Если это отображение удовлетворяет условиям:
1) $u(X + Y) = u(X) + u(Y)$;
2) $u(\alpha X) = \alpha u(X)$
для любых $X, Y \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то отображение u называется *линейным отображением* или *линейной формой* или *ковектором.* Первое условие называется *аддитивностью*, а второе – *однородностью* отображения u.

Условия аддитивности и однородности эквивалентны (докажите самостоятельно) выполнению условия

$$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y)$$

для любых $X, Y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Оно называется *линейностью* отображения u.

Пример 1.1. Рассмотрим отображение $0 : V \to \mathbb{R}$, заданное формулой $0(X) = 0$ для любого вектора X. Докажем, что это отображение линейно. В самом деле, для любых $X, Y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ получим

$$0(\alpha X + \beta Y) = 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha 0(X) + \beta 0(Y)$$

Таким образом, условие линейности выполняется и отображение 0 является линейным, то есть ковектором.
□

Обозначим множество всех ковекторов $u : V \to \mathbb{R}$ через V^*. Введем в этом множестве операции сложения ковекторов и умножения ковектора на число по формулам:

$$(u + v)(X) = u(X) + v(X); \quad (\lambda u)(X) = \lambda(u(X))$$

для любых $u, v \in V^*$, $X \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 1.1. *Введенные операции корректны, то есть $u+v$ и λu являются ковекторами.*

Доказательство. По определению операций сложения и свойству линейности получим

$$(u+v)(\alpha X+\beta Y)=u(\alpha X+\beta Y)+v(\alpha X+\beta Y)=\alpha u(X)+\beta u(Y)+\alpha v(X)+\beta v(Y)=$$
$$=\alpha(u(X)+v(X))+\beta(u(Y)+v(Y))=\alpha((u+v)(X))+\beta((u+v)(Y)).$$

Таким образом, сумма отображений u и v является ковектором, то есть принадлежит V^*. Аналогично доказывается, что произведение ковектора на число также является ковектором (докажите самостоятельно). □

Теорема 1.1. *Множество V^* ковекторов $u : V \to \mathbb{R}$ со введенными операциями сложения и умножения на число является векторным пространством.*

Доказательство. Нам нужно проверить выполнение 8 аксиом векторного пространства. Проверим, например, аксиому 1^0. Остальные проверяются аналогично.

Для любых $u, v \in V^*$, $X \in V$ по определению суммы ковекторов и свойствам сложения вещественных чисел получим

$$(u+v)(X)=u(X)+v(X)=v(X)+u(X)=(v+u)(X).$$

Итак, мы получили, что $(u+v)(X)=(v+u)(X)$ для любого вектора X. Так как два отображения $u+v$ и $v+u$ принимают одно и тоже значение на любом векторе $X\in V$, то эти отображения равны по определению равенства отображений.

Заметим, что нуль-вектором в векторном пространстве V^* будет отображение $0 : V \to \mathbb{R}$, построенное в примере 1.1. Докажите самостоятельно, что $u+0=u$ для любого $u\in V^*$. Этот ковектор мы будем называть *нуль-ковектором.*

Пусть $u \in V^*$ – произвольный элемент. Тогда через $(-u) : V \to \mathbb{R}$ обозначим отображение, действующее по формуле $(-u)(X)=-(u(X))$. Аналогично лемме 1.1 доказывается, что отображение $(-u)$ будет линейно, а значит, будет принадлежать множеству V^*. Докажите самостоятельно, что $u+(-u)=0$.

Итак, все 8 аксиом векторного пространства выполняются, а значит, множество V^* является векторным пространством. □

Пример 1.2. Пусть V – векторное пространство, $E=(e_1,\ldots,e_n)$ – произвольный базис V. Рассмотрим отображения $e^i : V\to\mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,n)$, которые каждому вектору $X\in V$ ставят в соответствие его $i-$ю координату в базисе E, то есть $e^i(X)=X^i$. В силу свойств координат векторов (координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат векторов слагаемых и аналогичное утверждение для произведения вектора на число) эти отображения будут линейными. В самом деле, для любых $X,Y\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получим

$$e^i(\alpha X+\beta Y)=\alpha X^i+\beta Y^i=\alpha e^i(X)+\beta e^i(Y)$$

Найдем значения ковекторов $e^1,\ldots,e^n$ на векторах базиса E. Так как координаты вектора $e_1(1,0,\ldots,0)$, то $e^1(e_1)=1$. Аналогично получим $e^2(e_1)=0$, …, $e^n(e_1)=0$. Рассматривая аналогичным образом остальные векторы базиса E, получим, что

$$e^i(e_j)=\begin{cases}1, \text{если } i=j;\\ 0, \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Правая часть этого равенства есть δ^i_j. □

Теорема 1.2. *Система ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$ является базисом векторного пространства V^*, а значит, V^* является $n-$ мерным векторным пространством.*

Доказательство. Докажем, что система $(e^1,\ldots,e^n)$ линейно независима. Рассмотрим ковекторы e^i $(i=1,\ldots,n)$, построенные в примере 1.2. Докажем, что система $(e^1,\ldots,e^n)$ линейно независима. Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 e^1+\ldots+\alpha_n e^n=0 \tag{1.8}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. В левой и правой частях этого равенства стоят ковекторы. Подействуем ими на вектор e_1 базиса E (см. пример 1.2. В результате получим $\alpha_1e^1(e_1)+\ldots+\alpha_ne^n(e_1)=0(e_1)$, то есть $\alpha_1=0$. Аналогично, действуя обеими частями равенства (1.8) на остальные вектора базиса E, получим $\alpha_2=0$, …, $\alpha_n=0$. Таким образом, система ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$ является линейно независимой.

Докажем, что любой ковектор можно представить в виде линейной комбинации ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$. Рассмотрим произвольный ковектор u. Тогда для любого вектора $X\in V$ получим

$$u(X)=u(X^ie_i)=X^iu(e_i)=u(e_i)e^i(X). \tag{1.9}$$

Обозначим числа $u(e_i)=u_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда $u=u_ie^i$, то есть любой ковектор u является линейной комбинацией ковекторов $(e^1,\ldots,e^n)$.

Итак, система $(e^1,\ldots,e^n)$ является базисом V^* по определению. □

Следствие 1.1. Из формулы (1.9) получим, что при фиксированном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ в V

$$u(X) = u_i X^i.$$

Замечание 1.3. Оказывается, что свойство $e^i(e_j) = \delta^i_j$ является характеристическим для дуального базиса. Это означает следующее: если для ковектора u верно, что $u(e_j)$ равно нулю для любого $j = 1, \dots, n$ кроме одного $(j = i)$, для которого $u(e_i) = 1$, то $u = e^i$.

Действительно, рассмотрим произвольный ковектор u, удовлетворяющий указанному свойству. Тогда

$$u(X) = u(X^j e_j) = X^j u(e_j) = X^i.$$

Итак, ковектор u любому вектору X ставит в соответствие его i-ю координату, а значит, $u = e^i$. Это верно для любого фиксированного i, $i = 1, \dots, n$.

Базис $(e^1, \dots, e^n)$ пространства V^* называется *дуальным базисом* векторного пространства V.

Из замечания 1.3 следует, что система ковекторов $(e^1, \dots, e^n)$ будет дуальным базисом для векторного пространства V тогда и только тогда, когда выполняется характеристическое свойство

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

где $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в V, $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в V. Обозначим через $(e^1, \dots, e^n)$ и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ соответствующие дуальные базисы. Пусть C – матрица перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$, то есть $\varepsilon_i = C^j_i e_j$. Рассмотрим произвольный ковектор $u \in V^*$ и обозначим (u_i) – координаты u в дуальном базисе $(e^1, \dots, e^n)$, $(\tilde{u}_i)$ – координаты u в дуальном базисе $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Выясним, как связаны между собой числа u_i и $\tilde{u}_i$. Имеем

$$\tilde{u}_i = u(\varepsilon_i) = u(C^j_i e_j) = C^j_i u(e_j) = C^j_i u_j.$$

Итак,

$$\tilde{u}_i = C^j_i u_j.$$

§1.3. Тензоры.

3.1. Пусть V – векторное пространство, V^* – дуальное пространство.

Определение 1.4. *Тензором типа* (r, s) называется отображение

$$t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R},$$

линейное по каждому аргументу.

Будем считать по определению, что вещественные числа являются тензорами типа (0,0).

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис V, $(e^1, \dots, e^n)$ – дуальный базис. Договоримся, что все индексы (если не оговорено противное) пробегают значения от 1 до n. Тогда для любого тензора t типа (r, s) определен набор чисел $\{t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}\}$ по формуле

$$t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e^{i_1}, \dots, e^{i_s}).$$

Эти числа называются *компонентами* тензора t в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Задача 1.1. Пусть даны $(e_1, \dots, e_n)$ – базис V, $(e^1, \dots, e^n)$ – дуальный базис и тензор t типа (r, s). Докажите, что значение тензора t на произвольном наборе $X_1, \dots, X_r \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$ вычисляется по формуле

$$t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} (X_1)^{j_1} \dots (X_r)^{j_r} (u^1)_{i_1} \dots (u^s)_{i_s},$$

где $X_k = (X_k)^i e_i$, $u^k = (u^k)_i e^i$ (см. §1.2.).

Указания. Разложите векторы и ковекторы по соответствующим базисам и воспользуйтесь линейностью тензора. □

Пусть даны два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в V. Обозначим через $(e^1, \dots, e^n)$ и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ соответствующие дуальные базисы. Пусть C – матрица перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$, то есть $\varepsilon_i = C^j_i e_j$.

Лемма 1.2. *Во введенных обозначениях*

$$\varepsilon^i = (C^{-1})^i_j e^j. \tag{1.10}$$

Доказательство. Рассмотрим систему ковекторов ($\varepsilon^i = (C^{-1})^i_j e^j$). Чтобы доказать, что они составляют дуальный базис, согласно замечанию 1.3 достаточно показать, что $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Имеем,

$$\varepsilon^i(\varepsilon_j) = ((C^{-1})^i_k e^k)(C^t_j e_t) = (C^{-1})^i_k C^t_j e^k(e_t) = (C^{-1})^i_k C^t_j \delta^k_t = (C^{-1})^i_t C^t_j = \delta^i_j.$$

□

Обозначим $\{t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\}$ компоненты тензора t в базисе E, а $\{\tilde{t}^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\}$ – компоненты тензора t в базисе $\tilde{E}$. Используя доказанную лемму, получим формулы, связывающие компоненты тензора t в базисах E и $\tilde{E}$. Имеем

$$\tilde{t}^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = t(\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_r}, \varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_s}) = t(C^{k_1}_{j_1} e_{k_1}, \dots, C^{k_r}_{j_r} e_{k_r}, (C^{-1})^{i_1}_{t_1} e^{t_1}, \dots, (C^{-1})^{i_s}_{t_s} e^{t_s}) =$$
$$= C^{k_1}_{j_1} \dots C^{k_r}_{j_r} (C^{-1})^{i_1}_{t_1} \dots (C^{-1})^{i_s}_{t_s} t(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) = C^{k_1}_{j_1} \dots C^{k_r}_{j_r} (C^{-1})^{i_1}_{t_1} \dots (C^{-1})^{i_s}_{t_s} t^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r}$$

Итак, мы получили соотношение

$$\tilde{t}^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = C^{k_1}_{j_1} \dots C^{k_r}_{j_r} (C^{-1})^{i_1}_{t_1} \dots (C^{-1})^{i_s}_{t_s} t^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r} \qquad (1.11)$$

Этот закон преобразования компонент тензора называется *тензорным законом.*

Задача 1.2. Докажите, что верно и обратное утверждение. А именно, если для каждого базиса векторного пространства V задан набор n^{r+s} вещественных чисел $\{t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\}$, которые при переходе от одного базиса ко второму преобразуются по тензорному закону (1.11), то однозначно определен тензор t типа (r, s), для которого эти числа будут компонентами в соответствующем базисе.

Указания. Задайте отображение

$$t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R},$$

по формуле

$$t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} (X_1)^{j_1} \dots (X_r)^{j_r} (u^1)_{i_1} \dots (u^s)_{i_s}$$

где $X_1, \dots, X_r \in V$, $u^1, \dots, u^s \in V^*$. Докажите, что это отображение не зависит от выбора базиса и линейно по каждому аргументу. Наконец, вычислите компоненты тензора t и убедитесь, что они совпадают с числами $\{t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\}$. □

Следствие 1.2. Два тензора равны (то есть совпадают как отображения) тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты в каком-либо базисе. Другими словами, чтобы убедиться, что два тензора равны, нужно выбрать "удобный"базис и вычислить в нем компоненты обоих тензоров. Если для соответствующих компонент получим одни и те же числа, то два тензора равны.

3.2. Приведем примеры тензоров.

Пример 1.3. Пусть в каждом базисе пространства V задан набор $n^2 - n$ нулей и n единиц. Расположим их в виде единичной $n \times n$-матрицы. Тогда эти числа мы можем обозначить символом Кронекера $\{\delta^i_j\}$. По определению обратной матрицы имеем $\delta^i_j = (C^{-1})^i_k C^k_j$ или $\delta^i_j = (C^{-1})^i_k \delta^k_t C^t_j$. Сравним это равенство с тензорным законом. Мы видим, что наборы чисел $\{\delta^i_j\}$ преобразуются как компоненты тензора типа (1,1), а значит, определяют его. Этот тензор обозначается δ^i_j. □

Пример 1.4. Рассмотрим произвольный ковектор u. Напомним, что по определению это линейное отображение $u : V \to \mathbb{R}$, а значит, по определению 1.4 это тензор типа (1,0). □

Пример 1.5. Рассмотрим произвольный вектор $X \in V$. Относительно каждого базиса вектор X определяет набор из n чисел $\{X^i\}$ – координат этого вектора в данном базисе. При переходе от базиса к базису эти наборы чисел преобразуются по закону (1.5). Сравнивая это равенство с тензорным законом (1.11), получаем, что вектор определяет тензор типа (0,1) с компонентами $\{X^i\}$. Обозначим этот тензор через t и выясним, как он действует на произвольный ковектор u. Так как числа $\{X^i\}$ являются компонентами тензора t (см. задачу 1.2), получим

$$t(u) = t(u_i e^i) = u_i t(e^i) = u_i X^i = u(e_i) X^i = u(X^i e_i) = u(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что координаты ковектора $u_i = u(e_i)$, то есть совпадают с его компонентами как тензора типа (1,0) (см. теорему 1.2).

Итак, мы получили, что любой вектор $X \in V$ однозначно определяет тензор t типа (0,1), действующий по формуле $t(u) = u(X)$, $u \in V^*$. Договоримся обозначать тензор t той же буквой X и говорить, что вектор X является тензором типа (0,1) и действует на произвольный ковектор u по формуле

$$X(u) = u(X). \;\square$$

Пример 1.6. Рассмотрим произвольный линейный оператор L. В каждом базисе он определяет n^2 вещественных чисел – матрицу (L^i_j) оператора L. Сравнивая закон преобразования элементов матрицы линейного оператора (1.7) с тензорным законом (1.11), получаем, что любой оператор L определяет тензор типа (1,1) с компонентами $\{L^i_j\}$. Обозначим полученный тензор t и аналогично предыдущему примеру получим

$$t(X,u) = t(X^i e_i, u_j e^j) = X^i u_j t(e_i, e^j) = L^j_i X^i u_j = L^j_i X^i u(e_j) = u(L^j_i X^i e_j) = u(L(X)).$$

Мы воспользовались линейностью t, u и формулой (1.2).

Итак, мы получили, что любой линейный оператор L однозначно определяет тензор типа (1,1) по формуле $t(X,u) = u(L(X))$. Договоримся обозначать этот тензор t той же буквой L и говорить, что линейный оператор L является тензором типа (1,1) и действует на произвольный вектор X и ковектор u по формуле

$$L(X,u) = u(L(X)).\,\square \qquad (1.12)$$

Пример 1.7. Пусть дано четно мерное векторное пространство V^{2n}. Рассмотрим относительно фиксированного базиса $(e_1,\ldots,e_{2n})$ в V набор $(2n)^2$ нулей, единиц и минус единиц, которые расположим в виде $2n\times 2n$-матрицы

$$((J_0)^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.13)$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $i,j = 1,\ldots,2n$. В любом другом базисе зададим набор чисел, которые будут получаться из $((J_0)^i_j)$ по тензорному закону (1.11). Согласно задаче 1.2 полученные наборы чисел задают тензор J_0 типа (1,1), причем сами являются его компонентами. Этот тензор называется *оператором канонической комплексной структуры* на векторном пространстве V. Смысл этого названия мы поймем в главе 2. $\square$

Задача 1.3. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Определим отображение $g: V^3\times V^3 \to \mathbb{R}$ по формуле

$$g(\vec a,\vec b) = |\vec a||\vec b| cos\angle(\vec a,\vec b),$$

где $\vec a,\vec b\in V^3$ – произвольные элементы. Другими словами, значение отображения g на векторах $\vec a$ и $\vec b$ является скалярным произведением этих векторов. Докажите, что отображение g является тензором типа (2,0). Найдите 1) компоненты тензора g в ортонормированном базисе $(\vec i,\vec j,\vec k)$ векторного пространства V^3; 2) компоненты тензора g в базисе $(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)$, если известно, что углы между парами векторов этого базиса равны 60^0, а длины векторов равны a_i соответственно.

Ответ: 1) $g_{ij}=0$, если $i\neq j$; $g_{ii}=1$, $i,j=1,2,3$; 2) $g_{ij}=\frac{1}{2}a_i a_j$, если $i\neq j$; $g_{ii}=a_i^2$.

Задача 1.4. Пусть V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство. Определим отображение $\omega: V^3\times V^3\times V^3\to\mathbb{R}$ по формуле

$$\omega(\vec a,\vec b,\vec c) = \vec a\vec b\vec c,$$

где $\vec a\vec b\vec c$ обозначает смешанное произведение векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$. Докажите, что отображение ω является тензором типа (3,0). Найдите компоненты этого тензора 1) в правом ортонормированном базисе $(\vec i,\vec j,\vec k)$; 2) в левом ортонормированном базисе.

Ответ: 1) $\omega_{ijk}=1$, если (i,j,k) – четная подстановка; $\omega_{ijk}=-1$, если (i,j,k) – нечетная подстановка, в остальных случаях $\omega_{ijk}=0$.

Задача 1.5. Пусть V^3 – ориентированное геометрическое векторное пространство. Зададим отображение $t: V^3\times V^3\times (V^3)^*\to\mathbb{R}$ по формуле

$$t(\vec a,\vec b,u) = u([\vec a,\vec b]),$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов. Докажите, что отображение t является тензором типа (2,1) и найдите его компоненты в правом ортонормированном базисе.

§1.4. Операции с тензорами.

4.1. Пусть даны тензоры t_1 и t_2 типа (r,s).

Определение 1.5. *Суммой тензоров* t_1 и t_2 называется отображение

$$t_1+t_2: \underbrace{V\times\ldots\times V}_{r\,\text{раз}}\times\underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{s\,\text{раз}}\to\mathbb{R},$$

определенное по формуле

$$(t_1+t_2)(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s) = t_1(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s)+t_2(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s),$$

$X_1,\ldots,X_r\in V$, $u^1,\ldots,u^s\in V^*$.

Задача 1.6. Докажите, что сумма тензоров является тензором, то есть отображение $t_1 + t_2$ линейно по каждому аргументу.

Для суммы тензором имеют место свойства:
1^0. $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$;
2^0. $(t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3)$,
t_1, t_2, t_3 – тензоры типа (r, s).
Докажите эти свойства самостоятельно, используя определение суммы тензоров.

Определение 1.6. Пусть t – тензор типа (r, s), λ – вещественное число. *Произведением тензора t на вещественное число λ* называется отображение

$$\lambda t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R}$$

определенное по формуле

$$(\lambda t)(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s) = \lambda(t(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)),$$

$X_1, \ldots, X_r \in V$, $u^1, \ldots, u^s \in V^*$.

Задача 1.7. Докажите, что произведение тензора на число является тензором, то есть отображение λt линейно по каждому аргументу.

Для произведения тензора на число имеют место свойства:
1^0. $\lambda(t_1 + t_2) = \lambda t_1 + \lambda t_2$;
2^0. $(\lambda + \mu)t = \lambda t + \mu t$;
3^0. $(\lambda(\mu t)) = (\lambda\mu)t$,
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, t – тензор типа (r, s).
Докажите эти свойства самостоятельно, используя определение произведения тензора на число.

Определение 1.7. Пусть t_1 – тензор типа (r, s), t_2 – тензор типа (p, q). *Тензорным произведением* тензоров t_1 и t_2 называется отображение

$$t_1 \otimes t_2 : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r+p\,\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s+q\,\text{раз}} \to \mathbb{R}$$

определенное по формуле

$$(t_1 \otimes t_2)(X_1, \ldots, X_{r+p}, u^1, \ldots, u^{s+q}) = t_1(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)t_2(X_{r+1}, \ldots, X_{r+p}, u^{s+1}, \ldots, u^{s+q}),$$

$X_1, \ldots, X_{r+p} \in V$, $u^1, \ldots, u^{s+q} \in V^*$.

Положим по определению $\lambda \otimes t = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$, t – тензор типа (r, s).

Задача 1.8. Докажите, что тензорное произведение тензоров является тензором, то есть отображением линейным по каждому аргументу.

Используя введенные определения легко доказать
1^0. $(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3)$;
2^0. $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3$;
3^0. $t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3$;
4^0. $(\lambda t_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (\lambda t_2) = \lambda(t_1 \otimes t_2)$, где тензоры t_1, t_2, t_3 – тензоры подходящих типов (для суммы тензоров нужно брать тензоры одного и того же типа, а для тензорного произведения можно брать тензоры произвольных типов), $\lambda \in \mathbb{R}$.

В общем случае операция тензорного умножения не коммутативна. Действительно, пусть $X, Y \in V$ – произвольные векторы. Рассмотрим тензорные произведения $X \otimes Y$ и $Y \otimes X$. Это тензоры типа (0,2). Докажем, что эти отображения различны. Для этого нужно привести пример пары ковекторов, на которых отображения $X \otimes Y$ и $Y \otimes X$ принимают различные значения.

Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V и дуальный базис $(e^1, \ldots, e^n)$. Пусть i, j – различные фиксированные индексы $(i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\begin{gathered} X \otimes Y(e^i, e^j) = X(e^i)Y(e^j) = e^i(X)e^j(Y) = X^iY^j; \\ Y \otimes X(e^i, e^j) = Y(e^i)X(e^j) = e^i(Y)e^j(X) = Y^iX^j. \end{gathered}$$

Мы можем взять векторы X и Y такими, что произведения их координат X^iY^j и Y^iX^j будут различными, а значит, $X \otimes Y \neq Y \otimes X$.

Задача 1.9. Докажите, что для тензора t типа $(r,0)$ и тензора T типа $(0,s)$ имеет место равенство $t\otimes T = T\otimes t$.

Указание. Подействуйте обеими частями равенства на набор $X_1,\dots,X_r\in V$, $u^1,\dots,u^s\in V^*$. $\square$

Пример 1.8. Пусть η – произвольный ковектор, ξ – произвольный вектор из V. Тогда их тензорное произведение $\eta\otimes\xi$ является тензором типа (1,1). Вычислим значение этого тензора на паре $X\in V$, $u\in V^*$:

$$(\eta\otimes\xi)(X,u)=\eta(X)\xi(u)=\eta(X)u(\xi)=u(\eta(X)\xi).$$

Мы воспользовались определением тензорного произведения и примером 1.5. Согласно (1.12) левая часть этого выражения равна $u((\eta\otimes\xi)(X))$. Тогда получим

$$u((\eta\otimes\xi)(X))=u(\eta(X)\xi). \tag{1.14}$$

Фиксируем в V базис $(e_1,\dots,e_n)$ и дуальный базис $(e^1,\dots,e^n)$. Тогда соотношение (1.14), верное для любого u, верно, в частности, для всех ковекторов дуального базиса, то есть

$$e^i((\eta\otimes\xi)(X))=e^i(\eta(X)\xi).$$

Это означает, что у векторов $(\eta\otimes\xi)(X)$ и $\eta(X)\xi$ равны все соответствующие координаты, а значит, равны и сами векторы. Таким образом, мы получаем

$$(\eta\otimes\xi)(X)=\eta(X)\xi;\quad \forall X\in V.\ \square$$

Определение 1.8. Пусть t тензор типа (r,s). Фиксируем базис $(e_1,\dots,e_n)$ в V и определим отображение

$$C^{(a)}_{(b)}t:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{r-1\,\text{раз}}\times\underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{s-1\,\text{раз}}\to\mathbb{R}$$

по формуле

$$(C^{(a)}_{(b)}t)(X_1,\dots,X_{r-1},u^1,\dots,u^{s-1})=\sum_{k=1}^n t(X_1,\dots,X_{b-1},e_k,X_b,\dots,X_{r-1},u^1,\dots,u^{a-1},e^k,u^a,\dots,u^{s-1}). \tag{1.15}$$

Это отображение называется *сверткой тензора t по a-му верхнему и b-му нижнему индексам.*

Задача 1.10. Докажите, что свертка тензора определена корректно в смысле независимости от выбора базиса. Докажите, что свертка тензора типа (r,s) является тензором типа $(r-1,s-1)$.

Указание. Возьмите два базиса и докажите, что правые части формулы (1.15) в этих базисах равны. Воспользуйтесь определением матрицы перехода и формулой (1.10). Для второй части задачи нужно доказать линейность отображения (1.15) по каждому аргументу. $\square$

Замечание 1.4. Если тензор t типа (r,s) нужно свернуть по двум парам индексов, то мы получим тензор типа $(r-2,s-2)$, который будем обозначать $C^{(a)(c)}_{(b)(d)}t$. Этот тензор будет вычисляться по формуле

$$(C^{(a)(c)}_{(b)(d)}t)(X_1,\dots,X_{r-2},u^1,\dots,u^{s-2})=$$

$$=\textstyle\sum_{t=1}^n\sum_{k=1}^n t(X_1,\dots,X_{b-1},e_k,X_b,\dots,X_{d-1},e_t,X_d,\dots,X_{r-2},u^1,\dots,u^{a-1},e^k,u^a,\dots,u^{c-1},e^t,u^c,\dots,u^{s-2}).$$

Аналогичные формулы имеют место для сверток по большему числу пар индексов.

4.2. Запишем введенные операции с тензорами в компонентах.

Теорема 1.3. *Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – произвольный базис в V, $(e^1,\dots,e^n)$ – дуальный базис. Тогда*

$$\begin{array}{llll} 1) & (t_1+t_2)^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}=(t_1)^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}+(t_2)^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}; & 2) & (\lambda t)^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}=\lambda t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r};\\ 3) & (t\otimes T)^{i_1\dots i_{s+q}}_{j_1\dots j_{r+p}}=t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}T^{i_{s+1}\dots i_{s+q}}_{j_{r+1}\dots j_{r+p}}; & 4) & (C^{(a)}_{(b)}t)^{i_1\dots i_{s-1}}_{j_1\dots j_{r-1}}=t^{i_1\dots i_{a-1}ki_a\dots i_{s-1}}_{j_1\dots j_{b-1}kj_b\dots j_{r-1}}, \end{array}$$

где t_1,t_2,t – тензоры типа (r,s), T – тензор типа (p,q), $\lambda\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Легко проверить, используя определение компонент тензора и определения операций с тензорами. $\square$

Задача 1.11. Выведите формулу, аналогичную 4) в теореме 1.3, для свертки по двум парам индексов. Ответ: $(C^{(a)(c)}_{(b)(d)}t)^{i_1\dots i_{s-2}}_{j_1\dots j_{r-2}}=t^{i_1\dots i_{a-1}ki_a\dots i_{c-1}ti_c\dots i_{s-2}}_{j_1\dots j_{b-1}kj_b\dots j_{d-1}tj_d\dots j_{r-2}}$.

Пример 1.9. Пусть L – тензор типа (1,1). Рассмотрим базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V и дуальный базис $(e^1, \dots, e^n)$. Тогда свертка тензора L по первому нижнему и первому верхнему индексам (см. (1.12))

$$C^{(1)}_{(1)} L = L(e_k, e^k) = e^k(L(e_k)) = L^k_k$$

будет вещественным числом. Это число не зависит от выбора базиса, называется *следом тензора* L и обозначается $tr\, L$. $\Box$

Пример 1.10. "Упростим"тензорные выражения: а) $C^{(1)}_{(1)}(\eta \otimes \xi)$; б) $C^{(2)}_{(1)}(L \otimes X)$; в) $C^{(1)}_{(1)}(L \otimes X)$, где $\xi, X \in V$, $\eta \in V^*$, L – тензор типа (1,1).

а) Это тензор типа (0,0). Воспользуемся теоремой 1.3:

$$C^{(1)}_{(1)}(\eta \otimes \xi) = (\eta \otimes \xi)^k_k = \eta_k \xi^k = \eta(\xi).$$

Здесь мы воспользовались примером 1.5 и следствием 1.1.

б) Рассмотрим тензор $C^{(2)}_{(1)}(L \otimes X)$. Это тензор типа (0,1), то есть вектор. Найдем координаты этого вектора (воспользуемся теоремой 1.3):

$$(C^{(2)}_{(1)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)^{ij}_j = L^i_j X^j$$

Сравнивая полученный результат с формулой (1.2), получим, что числа $(C^{(2)}_{(1)}(L \otimes X))^i$ суть координаты вектора $L(X)$, то есть

$$C^{(2)}_{(1)}(L \otimes X) = L(X).$$

в) Рассмотрим тензор $C^{(1)}_{(1)}(L \otimes X)$. Это тензор типа (0,1), то есть вектор. Найдем его координаты (воспользуемся теоремой 1.3):

$$(C^{(1)}_{(1)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)^{ji}_j = L^j_j X^i = (tr\, L) X^i.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 1.9. Аналогично пункту б) делаем вывод, что

$$C^{(1)}_{(1)}(L \otimes X) = (tr\, L) X. \Box$$

Задача 1.12. Пусть L – тензор типа (1,1), то есть линейный оператор, $X \in V$, $\eta \in V^*$. "Упростите"тензорные выражения: а) $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(\eta \otimes L \otimes X)$, б) $C^{(1)(2)}_{(2)(1)}(\eta \otimes L \otimes X)$.

Ответ: а) $\eta(L(X))$; б) $(tr\, L)\eta(X)$.

Пример 1.11. Рассмотрим два линейных оператора I и J. Как известно из курса алгебры композиция $I \circ J$ этих линейных операторов также является линейным оператором, то есть тензором типа (1,1). Выразим его с помощью тензорных операций через линейные операторы I и J.

Рассмотрим произвольный вектор $X \in V$. Тогда $(I \circ J)(X)$ – вектор. Выразим его координаты:

$$((I \circ J)(X))^i = (I(J(X)))^i = I^i_j (J(X))^j = I^i_j J^j_k X^k = (I \otimes J)^{ij}_{jk} X^k = (C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))^i_k X^k = ((C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))(X))^i. \tag{1.16}$$

Так как координаты векторов в крайне правой и крайне левой частях цепочки равенств равны, то равны и сами вектора, то есть

$$(I \circ J)(X) = (C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))(X)$$

Это верно для любого вектора X, а значит, равны и сами отображения, то есть

$$I \circ J = C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J).$$

В частности, из цепочки равенств (1.16) еще одну полезную формулу

$$(I \circ J)^i_j = I^i_k J^k_j. \tag{1.17}$$

Эту формулу мы можем получить и непосредственно, используя определение компонент тензора, формулы (1.12), (1.2) и свойство линейности линейного оператора:

$$(I \circ J)^i_j = (I \circ J)(e_j, e^i) = e^i(I(J(e_j)) = e^i(I(J^k_j e_k)) = J^k_j e^i(I(e_k)) = J^k_j e^i(I^t_k e_t) = J^k_j I^t_k e^i(e_t) = J^k_j I^t_k \delta^i_t = J^k_j I^i_k. \Box$$

Задача 1.13. Пусть L – линейный оператор, $\eta \in V^*$. Выразите через тензорные операции композицию $\eta \circ L$ и определите вид полученного тензора. Выразите компоненты тензора $\eta \circ L$ через компоненты тензоров L и η.

Ответ: $\eta \circ L = C^{(1)}_{(1)}(\eta \otimes L)$; $(\eta \circ L)_i = \eta_j L^j_i$.

Пример 1.12. Пусть на четно мерном векторном пространстве V^{2n} задан оператор канонической комплексной структуры J_0 (см. пример 1.7). Докажем, что $J_0 \circ J_0 = -id$. Согласно следствию 1.2 нам достаточно доказать, что в некотором фиксированном базисе компоненты тензора $J_0 \circ J_0$ равны

$$(J_0 \circ J_0)^i_j = -\delta^i_j,$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Согласно примеру 1.6 тензор типа (1,1) отождествляется с линейным оператором, причем его компоненты суть элементы матрицы этого оператора. Тогда $(J_0 \circ J_0)^i_j$ – элементы матрицы оператора $J_0 \circ J_0$. Как мы знаем из курса алгебры, чтобы матрицей композиции двух операторов является произведение матриц этих операторов, то есть

$$((J_0 \circ J_0)^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = -(\delta^i_j).$$

Доказанное свойство оператора канонической комплексной структуры называется *свойством антиинволютивности* J_0. □

Задача 1.14. Выясните геометрический смысл действия оператора канонической комплексной структуры векторного пространства V^2 на произвольный вектор этого пространства. Здесь предполагается, что базис, относительно которого матрица J_0 имеет вид (1.13), является ортонормированным.

Ответ: поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Задача 1.15. Пусть в четномерном векторном пространстве V^{2n} относительно некоторого фиксированного базиса $(e_1, \ldots, e_{2n})$ задана матрица

$$(\Pi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$. При переходе к любому другому базису эти числа преобразуются по тензорному закону. Аналогично примеру 1.7 получаем тензор Π типа (1,1).

Докажите, что $\Pi \circ \Pi = id$. Выясните геометрический смысл тензора Π в случае векторного пространства V^2 в предположении, что базис, относительно которого задана матрица (1.18), является ортонормированным.

Ответ: Осевая симметрия относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§1.5. Канонический базис в векторном пространстве тензоров типа (r, s).

Пусть V – векторное пространство. Обозначим множество всех тензоров на V типа (r, s) через $\mathfrak{T}^s_r(V)$. Из свойств операций сложения тензоров и умножения тензора на число (см. § 1.4.) следует, что множество $\mathfrak{T}^s_r(V)$ является векторным пространством. Нулевым элементом в этом векторном пространстве будет отображение, ставящее любому набору из r векторов и s ковекторов число нуль.

Задача 1.16. Аналогично примеру 1.1 докажите, что определенный выше нулевой элемент действительно является тензором, то есть докажите, что он линеен по каждому аргументу. Этот тензор обозначается 0 и называется *нуль-тензором*. Докажите, что нуль-тензор действительно является нейтральным по сложению, то есть для любого тензора $t \in \mathfrak{T}^s_r(V)$ верно равенство $t + 0 = t$.

Задача 1.17. Докажите, что для любого тензора $t \in \mathfrak{T}^s_r(V)$ отображение

$$-t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R},$$

определенное формулой

$$(-t)(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s) = -t(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)$$

является тензором. Докажите, что тензор $(-t)$ является противоположным для тензора t, то есть $t + (-t) = 0$.

Итак, мы выяснили, что множество тензоров типа (r, s) является векторным пространством. Оказывается это векторное пространство конечномерно. Чтобы узнать размерность пространства $\mathfrak{T}^s_r(V)$, нам нужно построить какой-нибудь его базис.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный базис в векторном пространстве V, $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис. Рассмотрим систему тензоров

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r}\} \tag{1.19}$$

Из определения 1.7 операции тензорного умножения следует, что $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r}$ – это тензоры типа (r, s).

Теорема 1.4. *Система тензоров (1.19) является базисом векторного пространства $\mathfrak{T}^s_r(V)$. В частности, размерность пространства $\mathfrak{T}^s_r(V)$ равна n^{r+s}. Координаты тензоров относительно этого базиса совпадают с компонентами этого тензора в базисе $E = (e_1, \dots, e_n)$.*

Доказательство. 1. Докажем, что система тензоров (1.19) линейно независима. Составим линейную комбинацию этих тензоров и приравняем ее нуль-тензору:

$$\lambda^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} = 0. \tag{1.20}$$

Фиксируем произвольный набор $e_{k_1}, \dots, e_{k_s}$ векторов базиса и $e^{t_1}, \dots, e^{t_r}$ ковекторов дуального базиса. Подействуем на них обеими частями уравнения (1.20). По определению операции тензорного умножения получим

$$\lambda^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} e_{i_1}(e^{t_1}) \dots e_{i_s}(e^{t_s}) e^{j_1}(e_{k_1}) \dots e^{j_r}(e_{k_r}) = 0(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}),$$

то есть

$$\lambda^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} \delta^{t_1}_{i_1} \dots \delta^{t_s}_{i_s} \delta^{j_1}_{k_1} \dots \delta^{j_r}_{k_r} = 0,$$

то есть

$$\lambda^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r} = 0.$$

Итак, мы получили, что все коэффициенты $\lambda^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r}$ в уравнении (1.20) должны быть равны нулю, то есть система тензоров (1.19) линейно независима.

2. Докажем, что любой тензор может быть представлен в виде линейной комбинации тензоров системы (1.19). Пусть t – произвольный тензор типа (r, s). Обозначим через $\{t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}\}$ компоненты тензора t в базисе E и построим тензор

$$T = t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}.$$

Докажем, что тензоры T и t совпадают. Согласно следствию 1.2 для этого достаточно показать, что тензоры T и t имеют одинаковые компоненты в базисе E. Компоненты тензора t у нас уже есть. Вычислим компоненты тензора T:

$$T^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r} = T(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) = t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_s}) =$$
$$= t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} \delta^{t_1}_{i_1} \dots \delta^{t_s}_{i_s} \delta^{j_1}_{k_1} \dots \delta^{j_r}_{k_r} = t^{t_1\dots t_s}_{k_1\dots k_r}$$

Итак, мы получаем, что тензоры T и t совпадают, а значит, тензор t представим в виде линейной комбинации тензоров (1.19). При этом координатами тензора t в построенном базисе являются его компоненты относительно базиса E. □

Определение 1.9. Базис $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}\}$ пространства тензоров $\mathfrak{T}^s_r(V)$ называется *каноническим.*

§1.6. Симметрические и кососимметрические тензоры.

6.1. Рассмотрим тензор t типа (r, s).

Определение 1.10. Тензор t называется *симметричным по a- му и b- му векторным аргументам*, если

$$t(X_1, \dots, X_a, \dots, X_b, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t(X_1, \dots, X_b, \dots, X_a, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s).$$

Сформулируйте аналогичное определение для ковекторных аргументов самостоятельно.

В компонентах определения симметричности по паре одноименных аргументов выглядят следующим образом:

$$t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_a\dots j_b\dots j_r} = t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_b\dots j_a\dots j_r}; \quad t^{i_1\dots i_a\dots i_b\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = t^{i_1\dots i_b\dots i_a\dots i_s}_{j_1\dots j_r}$$

При этом говорят, что тензор t *симметричен по a- му и b- му верхним (соответственно, нижним) индексам.*

Определение 1.11. Тензор t называется *кососимметричным по a- му и b- му векторным аргументам*, если

$$t(X_1, \dots, X_a, \dots, X_b, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = -t(X_1, \dots, X_b, \dots, X_a, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s).$$

Сформулируйте аналогичное определение для ковекторных аргументов самостоятельно.

В компонентах определения кососимметричности по паре одноименных аргументов выглядят следующим образом:

$$t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_a\dots j_b\dots j_r} = -t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_b\dots j_a\dots j_r}; \quad t^{i_1\dots i_a\dots i_b\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = -t^{i_1\dots i_b\dots i_a\dots i_s}_{j_1\dots j_r}$$

При этом говорят, что тензор t *кососимметричен по a- му и b- му верхним (соответственно, нижним) индексам.*

Для тензоров типов $(r, 0)$ и $(0, s)$ можно ввести еще два определения.

Определение 1.12. Будем называть тензор t типа $(r,0)$ *симметрическим* (соответственно, *кососимметрическим*), если он симметричен (соответственно, кососимметричен) по любой паре своих аргументов.

Аналогичное определение имеет место и для тензора типа $(0,s)$.

Пример 1.13. Тензор $\eta\otimes\eta$, где $\eta\in V^*$, является симметрическим тензором типа (2,0). Действительно, для любых векторов $X,Y\in V$ имеем

$$\eta\otimes\eta(X,Y)=\eta(X)\eta(Y)=\eta(Y)\eta(X)=\eta\otimes\eta(Y,X).\,\square$$

6.2. Далее будем рассматривать множество $\mathfrak{T}^0_r(V)$ всех тензоров типа $(r,0)$. Заметим, что аналогичные рассуждения справедливы для тензоров типа $(0,s)$.

Обозначим множество всех симметрических тензоров типа $(r,0)$ через $\mathscr{S}_r(V)$, а множество всех кососимметрических тензоров типа $(r,0)$ – через $\Lambda_r(V)$.

Напомним, что *подстановкой степени* r называется произвольное биективное соответствие σ множества $\{1,\dots,r\}$ на себя. Обычно подстановка обозначается двустрочной таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(r)\end{pmatrix}$$

Подстановки делятся на четные и нечетные в зависимости от того, четно или нечетно число пар $(\sigma(i),\sigma(j))$, для которых $i<j$, $\sigma(i)>\sigma(j)$, $(i,j=1,\dots,r)$. *Знаком подстановки* называется число $+1$, если подстановка четная и число -1, если подстановка нечетная. Знак подстановки обозначается $\varepsilon(\sigma)$.

Фиксируем произвольную подстановку $\sigma\in S_r$. Определим отображение, которое будем обозначать той же буквой σ

$$\sigma:\mathfrak{T}^0_r(V)\to\mathfrak{T}^0_r(V)$$

по формуле $(\sigma t)(X_1,\dots,X_r)=t(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r)})$, где $X_1,\dots,X_r\in V$ – произвольные векторы. Это отображение называется *действием подстановки* σ на векторном пространстве тензоров типа $(r,0)$. Так как действие на векторном пространстве тензоров определено для любой подстановки из группы S_r, говорят, что *группа подстановок* S_r *действует на векторном пространстве тензоров типа* $(r,0)$.

Предложение 1.1 **.** *Действие группы подстановок обладает следующим свойством*

$$\sigma(\tau t)=(\tau\circ\sigma)(t).$$

Доказательство. Рассмотрим две произвольные подстановки $\sigma,\tau\in S_r$. Тогда

$$(\sigma(\tau t))(X_1,\dots,X_r)=(\tau t)(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r)})=t(X_{\tau(\sigma(1))},\dots,X_{\tau(\sigma(r))})=((\tau\circ\sigma)(t))(X_1,\dots,X_r)$$

Так как это верно для любых векторов $X_1,\dots,X_r\in V$, то получим

$$\sigma(\tau t)=(\tau\circ\sigma)(t)$$

Если для действия группы имеет место такой закон композиции, то говорят, что *группа действует справа.* В нашем случае получаем, что группа подстановок действует справа на векторном пространстве тензоров типа $(r,0)$. Заметим, что закон композиции самих подстановок $\sigma,\tau\in S_r$ остается прежним $\sigma(\tau(k))=(\sigma\circ\tau)(k)$, где k – натуральное число от 1 до r. $\square$

Задача 1.18. Докажите, что действие группы подстановок на векторном пространстве тензоров $\mathfrak{T}^0_r(V)$ линейно, то есть

$$\sigma(\alpha t_1+\beta t_2)=\alpha\sigma(t_1)+\beta\sigma(t_2),$$

где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $t_1,t_2\in\mathfrak{T}^0_r(V)$.

Задача 1.19. Тензор $t\in\mathfrak{T}^0_r(V)$ является симметрическим тогда и только тогда, когда $\sigma t=t$.
Тензор $t\in\mathfrak{T}^0_r(V)$ является кососимметрическим тогда и только тогда, когда $\sigma t=\varepsilon(\sigma)t$.

Указание. Напомним, что любая подстановка раскладывается в композицию транспозиций (подстановка, в которой меняются местами только два элемента, а остальные остаются на своих местах). Четная подстановка раскладывается в четное число транспозиций, а нечетная – в нечетное число. $\square$

Определим два отображения

$$Alt:\mathfrak{T}^0_r(V)\to\Lambda_r(V);\quad Sym:\mathfrak{T}^0_r(V)\to\mathscr{S}_r(V)$$

по формулам

$$Alt(t)=\tfrac{1}{r!}\textstyle\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)\sigma t;\quad Sym(t)=\tfrac{1}{r!}\textstyle\sum_{\sigma\in S_r}\sigma t.$$

Отображение Alt называется *оператором альтернирования*, а отображение Sym – *оператором симметризации.*

Докажем, что операции определены корректно, то есть тензор $Alt(t)$ является кососимметрическим, а $Sym(t)$ – симметрическим тензором.

В самом деле, согласно задаче 1.19 нам нужно доказать, что любой фиксированной подстановки τ получим $\tau(Alt(t)) = \varepsilon(\tau)Altt$ для любой подстановки $\tau \in S_r$. Согласно определению оператора альтернирования получим

$$\tau(Alt(t)) = \tau\left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)\sigma(t)\right) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)((\sigma\circ\tau)(t)) \tag{1.21}$$

Здесь мы воспользовались задачей 1.18 и предложением 1.1 . Обозначим подстановку $\sigma\circ\tau$ через σ'. Тогда если подстановка σ пробегает все множество S_r, то его пробегает и подстановка σ'. Кроме того, так как $\sigma' = \sigma\circ\tau$, то для знаков этих подстановок получим $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. Откуда получим $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\tau)$ (напомним, что знак подстановки – это либо $+1$, либо -1). Вернемся к цепочке равенств (1.21):

$$\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)((\sigma\circ\tau)(t)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma'\in S_r}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma')\sigma'(t) = \varepsilon(\tau)Alt(t).$$

Здесь мы воспользовались задачей 1.18 в обратную сторону и определением оператора альтернирования в обратную сторону. Итак, мы получаем, что образом произвольного тензора t при операции альтернирования является кососимметрический тензор.

Доказательство для оператора Sym аналогично (докажите самостоятельно).

Задача 1.20. Докажите, что отображения Alt и Sym линейны, то есть $Alt(\alpha t_1+\beta t_2) = \alpha Alt(t_1)+\beta Alt(t_2)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $t_1,t_2\in\mathfrak{T}^0_r(V)$ и аналогичное равенство для отображения Sym.

Указание. Непосредственно следует из того, что $\sigma(t_1+t_2) = \sigma t_1+\sigma t_2$, $\sigma(\alpha t) = \alpha\sigma(t)$. $\square$

Задача 1.21. Докажите, что $Alt(t) = t$ для любого $t\in\Lambda_r(V)$ и $Sym(T) = T$ для любого $T\in\mathscr{S}_r(V)$. Другими словами, любой кососимметрический тензор оператор альтернирования переводит в себя; любой симметрический тензор оператор симметризации переводит в себя.

Указания. Примените определение операций альтернирования и симметризации и задачу 1.19. $\square$

Задача 1.22. А что будет, если к симметрическому тензору применить оператор альтернирования, а к кососимметрическому тензору – оператор симметризации?

Ответ: нуль.

Пример 1.14. Рассмотрим множество $\mathfrak{T}^0_2(V)$ тензоров типа (2,0). Пусть t – произвольный тензор из $\mathfrak{T}^0_2(V)$. Фиксируем в V базис $(e_1,\dots,e_n)$ и найдем компоненты тензоров $Alt(t)$ и $Sym(t)$ в этом базисе. По определению компонент тензора и определению оператора альтернирования имеем

$$(Alt(t))_{ij} = (Alt(t))(e_i,e_j) = \left(\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)\sigma(t)\right)(e_i,e_j) = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)\left(\sigma(t)(e_i,e_j)\right). \tag{1.22}$$

В группе подстановок S_2 всего две подстановки: $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Первая из них является четной, а вторая – нечетной. Тогда продолжая цепочку равенств (1.22), получим

$$(Alt(t))_{ij} = \frac{1}{2}\left(t(e_i,e_j)-t(e_j,e_i)\right) = \frac{1}{2}(t_{ij}-t_{ji}).$$

Обычно компоненты $(Alt(t))_{ij}$ обозначают $t_{[ij]}$. В этих обозначениях полученная формула примет вид:

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2}(t_{ij}-t_{ji}).$$

Аналогично рассуждая и вводя обозначение $(Sym(t))_{ij} = t_{(ij)}$, получим формулу для компонент тензора $Sym(t)$:

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2}(t_{ij}+t_{ji}).\square$$

Задача 1.23. Вычислите компоненты тензоров $Alt(t)$ и $Sym(t)$ для тензора t типа (3,0).

Ответ:

$$t_{[ijk]} = \tfrac{1}{6}(t_{ijk}+t_{jki}+t_{kij}-t_{jik}-t_{kji}-t_{ikj});\quad t_{(ijk)} = \tfrac{1}{6}(t_{ijk}+t_{jki}+t_{kij}+t_{jik}+t_{kji}+t_{ikj}).$$

Здесь введены обозначения $(Alt(t))_{ijk} = t_{[ijk]}$, $(Sym(t))_{ijk} = t_{(ijk)}$.

6.3. Пусть дан тензор t типа (r,s). Рассмотрим отображение T, заданное формулой

$$T(X_1,X_2,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)=\frac{1}{2!}(t(X_1,X_2,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)+t(X_2,X_1,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)),$$

$X_1,X_2,X_3,\dots,X_r\in V$, $u^1,\dots,u^s\in V^*$. Легко видеть, что отображение T линейно по каждому, а значит, является тензором типа (r,s). Будем называть тензор T *результатом симметризации тензора t по первым двум векторным аргументам.*

Используя определение компонент тензора, легко получить, что компоненты тензора T имеют вид

$$T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}=\frac{1}{2!}(t^{i_1\dots i_s}_{j_1j_2j_3\dots j_r}+t^{i_1\dots i_s}_{j_2j_1j_3\dots j_r}) \tag{1.23}$$

Договоримся обозначать компоненты тензора T через $t^{i_1\dots i_s}_{(j_1j_2)j_3\dots j_r}$. В этих обозначениях формула (1.23) примет вид

$$t^{i_1\dots i_s}_{(j_1j_2)j_3\dots j_r}=\frac{1}{2!}(t^{i_1\dots i_s}_{j_1j_2j_3\dots j_r}+t^{i_1\dots i_s}_{j_2j_1j_3\dots j_r})$$

Будем при этом говорить, что тензор T получен из тензора t *симметризацией по первым двум нижним индексам.*

Если индексы, по которым проводится симметризация стоят не подряд, то будем выделять индексы, не участвующие в симметризации, прямыми "скобками". Например,

$$t^m_{(i|jk|t)\ell}=\frac{1}{2!}(t^m_{ijkt\ell}+t^m_{tjki\ell}).$$

Здесь симметризация проводится по индексам i и t.

Аналогичным образом определяется симметризация тензора по ковекторным аргументам. Заметим, что симметризация по одному верхнему и одному нижнему индексам не определяется.

Аналогичным образом определим *операцию альтернации по двум одноименным аргументам* по формуле

$$T(X_1,X_2,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)=\frac{1}{2!}(t(X_1,X_2,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)-t(X_2,X_1,X_3,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)),$$

$X_1,X_2,X_3,\dots,X_r\in V$, $u^1,\dots,u^s\in V^*$.

В компонентах эта операция будет выглядеть следующим образом:

$$t^{i_1\dots i_s}_{[j_1j_2]j_3\dots j_r}=\frac{1}{2!}(t^{i_1\dots i_s}_{j_1j_2j_3\dots j_r}-t^{i_1\dots i_s}_{j_2j_1j_3\dots j_r})$$

Здесь компоненты $T^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}$ обозначены через $t^{i_1\dots i_s}_{[j_1j_2]j_3\dots j_r}$. Будем говорить, что тензор T получен из тензора t *альтернацией по первым двум нижним индексам.* Если индексы идут не подряд, то будем выделять, не участвующие в альтернации индексы прямыми "скобками":

$$t^m_{[i|jk|t]\ell}=\frac{1}{2!}(t^m_{ijkt\ell}-t^m_{tjki\ell}).$$

Операции симметризации и альтернирования по двум одноименным аргументам можно распространить на большее число аргументов. Так как операции симметризации и альтернирования по части аргументов нам чаще всего придется применять в "компонентном"виде, то приведем эти определения сразу в компонентах. Например, альтернация по трем первым нижним индексам задается формулой

$$t^m_{[ijk]\ell}=\frac{1}{3!}(t^m_{ijk\ell}+t^m_{jki\ell}+t^m_{kij\ell}-t^m_{jik\ell}-t^m_{kji\ell}-t^m_{ikj\ell}).$$

Общий принцип следующий: перед скобкой ставится единица деленная на факториал количества индексов, участвующих в альтернации, а в скобках идут компоненты тензора t, взятые со знаком $+$, если соответствующая перестановке индексов подстановка является четной и со знаком $-$, если нечетной. При этом перебираются все возможные перестановки индексов, участвующих в альтернации.

Симметризация тензора по трем нижним индексам задается формулой

$$t^m_{[ijk]\ell}=\frac{1}{3!}(t^m_{ijk\ell}+t^m_{jki\ell}+t^m_{kij\ell}+t^m_{jik\ell}+t^m_{kji\ell}+t^m_{ikj\ell}).$$

При симметризации также как при альтернации перебираются все возможные перестановки индексов, участвующих в симметризации, но перед всеми компонентами тензора всегда ставится знак $+$.

Задача 1.24. Запишите в компонентах альтернацию тензора t типа (3,5) по второму, четвертому и пятому верхним индексам.

Задача 1.25. Докажите, что если симметризовать тензор по паре нижних индексов, то полученный тензор будет симметричен по этим индексам. Докажите аналогичное утверждение для альтернации по паре нижних индексов.

Задача 1.26. Пусть тензор t кососимметричен по первой паре нижних индексов. Докажите, что компоненты тензора t вида $t_{ii\ldots}$ равны нулю.

Задача 1.27. Докажите, что в трехмерном векторном пространстве V^3 любой кососимметрический тензор типа $(r,0)$, $r>3$ является нуль-тензором.

Задача 1.28. Докажите, что если $t_1 \in \Lambda^2(V)$ (то есть кососимметрический тензор типа (0,2)), $t_2 \in \mathscr{S}_2(V)$, то $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(t_1 \otimes t_2) = 0$.

Задача 1.29. Докажите, что любой тензор t типа (3,0) можно представить в виде

$$t_{ijk} = t_{(ijk)} + t_{[ijk]} + \frac{2}{3}(t_{(ij)k} - t_{j(ik)}) + \frac{2}{3}(t_{i[jk]} + t_{[ik]j}).$$

Задача 1.30. Докажите, что если тензор $t \in \mathfrak{T}^0_3(V)$ кососимметричен по первым двум индексам, то

$$t_{[ijk]} = \frac{1}{3}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij}).$$

Задача 1.31. Докажите, что если тензор $t \in \mathfrak{T}^0_3(V)$ симметричен по первым двум индексам, то

$$t_{(ijk)} = \frac{1}{3}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij}).$$

Пример 1.15. Рассмотрим тензор B типа (2,1), кососимметричный по паре векторных аргументов (в другой терминологии – кососимметричный по паре нижних индексов).

Назовем *следом* тензора B тензор $C^{(1)}_{(1)}B$. След тензора B будем обозначать $tr\,B$. Это тензор типа (1,0), то есть ковектор. Найдем его компоненты в произвольном базисе $(e_1,\ldots,e_n)$ векторного пространства V. Согласно теореме 1.3 получим

$$(tr\,B)_i = B^j_{ji}.$$

Будем говорить, что тензор B *бесследный*, если $tr\,B=0$. В компонентах это условие примет вид $B^j_{ji}=0$.

Назовем тензор B *примитивным*, если

$$B = \frac{1}{2}(u \otimes id - id \otimes u), \tag{1.24}$$

где u – некоторый подходящий ковектор, id – тождественный оператор (тензор типа (1,1)).

Выясним, как выглядит соотношение (1.24) в компонентах. По определению компонент тензора (см. § 1.3.) и формуле (1.12) получим

$$\begin{aligned} B^k_{ij} = B(e_i,e_j,e^k) = \tfrac{1}{2}(u\otimes id - id\otimes u)(e_i,e_j,e^k) = \tfrac{1}{2}(u(e_i)id(e_j,e^k) - id(e_i,e^k)u(e_j)) = \\ = \tfrac{1}{2}(u_i e^k(e_j) - u_j e^k(e_i)) = \tfrac{1}{2}(u_i\delta^k_j - u_j\delta^k_i) \end{aligned}$$

Используем определение альтернации по двум индексам и запишем полученный результат в виде

$$B^k_{ij} = \frac{1}{2}(u_i\delta^k_j - u_j\delta^k_i) \equiv u_{[i}\delta^k_{j]}. \tag{1.25}$$

Наконец, выразим ковектор u через тензор B. Подобного рода вычисления удобно проводить "в компонентах то есть выразить компоненты ковектора u через компоненты тензора B.

Рассмотрим соотношения (1.25). Это n^3 равенств. Выберем из них равенства, у которых индексы k и i принимают одинаковые значения и сложим эти равенства:

$$B^k_{kj} = \frac{1}{2}(u_k\delta^k_j - u_j\delta^k_k)$$

В левой части равенства мы получили компоненты следа $tr\,B$ тензора B. Вычислим правую часть равенства. Способ вычисления первого слагаемого нам уже знаком (см. замечание 1.2): в сумме $u_k\delta^k_j$ все слагаемые кроме слагаемого, для которого $k=j$, равны нулю, то есть $u_k\delta^k_j = u_j$. Рассмотрим второе слагаемое: $\delta^k_k = \delta^1_1 + \ldots + \delta^n_n$ – это сумма из n штук 1, то есть $\delta^k_k = n$. Итак, мы получим $(tr\,B)_j = \frac{1}{2}(u_j - nu_j)$. Выражая отсюда u_j имеем

$$u_j = \frac{2}{1-n}(tr\,B)_j.$$

Так как компоненты двух ковекторов равны, то равны и сами ковекторы. Окончательно получим

$$u = \frac{2}{1-n}(tr\,B) \tag{1.26}$$

Вывод: ковектор u из определения примитивного тензора определен однозначно с помощью формулы (1.26). □

Пример 1.16. Пусть B – тензор типа (2,1), кососимметричный по паре векторных аргументов (в другой терминологии – кососимметричный по паре нижних индексов). Докажем, что тензор B можно представить в виде суммы

$$B = C + D,$$

где C – бесследный тензор типа (2,1), D – примитивный тензор типа (2,1).

Поставленную задачу удобно решать в компонентах. Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в векторном пространстве V. Тогда тензор B имеет компоненты $\{B^k_{ij}\}$. Рассмотрим тензор C с компонентами

$$C^k_{ij} = B^k_{ij} - \frac{1}{n-1}((tr\,B)_j\delta^k_i - (tr\,B)_i\delta^k_j).$$

В правой части этого соотношения записаны операции с тензорами (см. теорему 1.3), а значит, числа C^k_{ij} являются компонентами тензора типа (2,1). Вычислим его след (см. пример 1.15):

$$C^k_{kj} = B^k_{kj} - \frac{1}{n-1}((tr\,B)_j\delta^k_k - (tr\,B)_j) = B^k_{kj} - \frac{1}{n-1}((tr\,B)_j n - (tr\,B)_j) = (tr\,B)_j - \frac{n-1}{n-1}(tr\,B)_j = 0.$$

Таким образом, тензор C – бесследный.

Наконец, тензор D зададим с помощью его компонент D^k_{ij}:

$$D^k_{ij} = B^k_{ij} - C^k_{ij}.$$

Покажем, что тензор D является примитивным. Действительно,

$$D^k_{ij} = B^k_{ij} - B^k_{ij} + \frac{1}{n-1}((tr\,B)_j\delta^k_i - (tr\,B)_i\delta^k_j) = \frac{1}{n-1}((tr\,B)_j\delta^k_i - (tr\,B)_i\delta^k_j).$$

Если обозначить $u_i = \frac{2}{1-n}(tr\,B)_i$, то получим

$$D^k_{ij} = u_{[i}\delta^k_{j]}.$$

Таким образом, тензор D является примитивным тензором и, кроме того, $B^k_{ij} = C^k_{ij} + D^k_{ij}$. □

Задача 1.32. Запишите решение примера 1.16 в инвариантном виде (то есть без использования компонент тензора).

Задача 1.33. Можно ли придумать что-то аналогичное примеру 1.16 для тензора B типа (2,1), симметричного по векторным аргументам (то есть симметричного по паре нижних индексов)?

Задача 1.34. Докажите, что любой тензор C типа (2,0) можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического тензора.

Указание. Очевидно, что $C_{ij} = C_{[ij]} + C_{(ij)}$.

Пример 1.17. Пусть дан тензор B типа (3,0), кососимметричный по последней паре векторных аргументов (то есть по последней паре индексов). Докажите, что тензор B можно представить в виде суммы

$$B = C + D,$$

где C – кососимметрический тензор типа (3,0) (то есть тензор кососимметричный по любой паре аргументов), D – тензор типа (3,0), такой что $Alt(D) = 0$ (такие тензоры называются *квазисимметричными*).

Решим поставленную задачу в компонентах. Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в векторном пространстве V. Тогда компоненты тензора B имеют вид B_{ijk}. Обозначим через $C = Alt(B)$, то есть $C_{ijk} = B_{[ijk]}$. Тогда

$$D_{ijk} = B_{ijk} - B_{[ijk]} = B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij}) = \frac{2}{3}B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{jki} + B_{kij}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $B_{ijk} = -B_{ikj}$. Таким образом,

$$D_{ijk} = \frac{2}{3}B_{ijk} - \frac{1}{3}(B_{jki} + B_{kij}) \tag{1.27}$$

Вычислим $D_{[ijk]}$. Имеем

$$D_{[ijk]} = \frac{2}{3}B_{[ijk]} - \frac{1}{3}(B_{[jki]} + B_{[kij]}) = \frac{2}{3}B_{[ijk]} - \frac{1}{3}(B_{[ijk]} + B_{[ijk]}) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что образом произвольного тензора при альтернировании будет кососимметрический тензор, то есть тензор, кососимметричный по любой паре индексов.

Запишем определение тензора D в инвариантной форме. Применим определение компонент тензора к формуле (1.27):

$$D(e_i, e_j, e_k) = \frac{2}{3}B(e_i, e_j, e_k) - \frac{1}{3}(B(e_j, e_k, e_i) + B(e_k, e_i, e_j)). \qquad (*)$$

Рассмотрим произвольные векторы $X, Y, Z \in V$. Тогда $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$. Умножим обе части равенств $(*)$ на соответствующие X^i, Y^j, Z^k и просуммируем по индексам i, j, k:

$$D(X^i e_i, Y^j e_j, Z^k e_k) = \frac{2}{3}B(X^i e_i, Y^j e_j, Z^k e_k) - \frac{1}{3}(B(Y^j e_j, Z^k e_k, X^i e_i) + B(Z^k e_k, X^i e_i, Y^j e_j)).$$

Здесь мы воспользовались линейностью тензоров. Тогда получим

$$D(X, Y, Z) = \frac{2}{3}B(X, Y, Z) - \frac{1}{3}(B(Y, Z, X) - B(Z, X, Y)).$$

Итак, мы разложили тензор B в сумму $B = C + D$, где $C = Alt(B)$, $D(X, Y, Z) = \frac{2}{3}B(X, Y, Z) - \frac{1}{3}(B(Y, Z, X) - B(Z, X, Y))$. □

Задача 1.35. Придумайте что-нибудь аналогичное для тензора B типа (3,0), симметричного по последней паре индексов.

§1.7. Операция внешнего умножения.

Напомним, что множество кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ мы обозначили через $\Lambda_r(V)$. Будем называть такие тензоры *r-ковекторами*. Аналогично, будем называть кососимметрические тензоры типа $(0, r)$ *r-векторами* и обозначим через $\Lambda^r(V)$ множество всех r-векторов. Все дальнейшие построения настоящего параграфа мы будем проводить для r-ковекторов. Аналогичные результаты для r-векторов получите самостоятельно.

Определение 1.13. Пусть $t_1 \in \Lambda_{r_1}(V)$, $t_2 \in \Lambda_{r_2}(V)$ – произвольные кососимметрические тензоры. Внешним произведением тензоров t_1 и t_2 называется кососимметрический тензор $t_1 \wedge t_2$ типа $(r_1 + r_2, 0)$, определенный формулой

$$t_1 \wedge t_2 = \frac{(r_1 + r_2)!}{r_1! r_2!} Alt(t_1 \otimes t_2). \qquad (1.28)$$

Теорема 1.5. *Операция внешнего умножения обладает следующими свойствами:*

1. $(t_1 + t_2) \wedge t_3 = t_1 \wedge t_3 + t_2 \wedge t_3$;
2. $t_1 \wedge (t_2 + t_3) = t_1 \wedge t_2 + t_1 \wedge t_3$;
3. $(\alpha t_1) \wedge t_2 = t_1 \wedge (\alpha t_2) = \alpha(t_1 \wedge t_2)$;
4. $(t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3)$,

где t_1, t_2, t_3 – кососимметрические тензоры подходящих типов, α – вещественное число.

Доказательство. Первые три свойства доказываются легко по определениям и свойствам линейности тензорного умножения и оператора Alt.

Докажем четвертое свойство. Прежде всего заметим, что если $p < r$, то имеет место естественное вложение $S_p \subset S_r$ по формуле

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \to \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & r \\ i_1 & \dots & i_p & p+1 & \dots & r \end{pmatrix}.$$

Будем отождествлять подстановку σ с подстановкой $\bar{\sigma}$ и обозначать ее той же буквой σ. Тогда очевидна следующая лемма.

Лемма 1.3. *Пусть $t_1 \in \mathfrak{T}^0_p(V)$, $t_2 \in \mathfrak{T}^0_{r-p}(V)$, $\sigma \in S_p$, $\tau \in S_{r-p}$. Тогда*

$$\sigma(t_1 \otimes t_2) = \sigma(t_1) \otimes t_2; \quad \tau(t_1 \otimes t_2) = t_1 \otimes \tau(t_2).$$

Лемма 1.4. *Пусть* $\sigma \in S_r$, $t \in \mathfrak{T}^0_r(V)$. *Тогда*

$$\sigma \circ Alt(t) = \varepsilon(\sigma) Alt(t); \quad Alt \circ \sigma(t) = \varepsilon(\sigma) Alt(t).$$

В частности, $\sigma \circ Alt = Alt \circ \sigma$.

☐ Пусть $X_1, \ldots, X_r \in V$ – произвольные векторы. Тогда

$$(\sigma \circ Alt(t))(X_1, \ldots, X_r) = Alt(t)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) = \tfrac{1}{r!} \textstyle\sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau)(\tau\, t)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) = \\ = \tfrac{1}{r!} \textstyle\sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau) t(X_{\tau \circ \sigma(1)}, \ldots, X_{\tau \circ \sigma(r)})$$

Обозначим $\sigma' = \tau \circ \sigma$. Тогда $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ и, продолжая цепочку равенств, получим

$$\frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \varepsilon(\tau) t(X_{\tau \circ \sigma(1)}, \ldots, X_{\tau \circ \sigma(r)}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma' \in S_r} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') t(X_{\sigma'(1)}, \ldots, X_{\sigma'(r)}) = \varepsilon(\sigma) Alt(t)(X_1, \ldots, X_r).$$

Второе соотношение доказывается аналогично. ■

Лемма 1.5. *Для любых* $t_1 \in \mathfrak{T}^0_p(V)$, $t_2 \in \mathfrak{T}^0_{r-p}(V)$ *имеем*

$$Alt(Alt(t_1) \otimes t_2) = Alt(t_1 \otimes Alt(t_2)) = Alt(t_1 \otimes t_2)$$

Другими словами, внешняя альтернация "съедает"все внутренние.

☐ По определению операции альтернирования получим

$$Alt(t_1) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\sigma(t_1).$$

Тогда получим

$$Alt(t_1) \otimes t_2 = \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\sigma(t_1) \right) \otimes t_2 = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)(\sigma(t_1) \otimes t_2) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\sigma(t_1 \otimes t_2).$$

Наконец, вычислим $Alt(Alt(t_1) \otimes t_2)$:

$$Alt(Alt(t_1) \otimes t_2) = Alt\left(\tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\sigma(t_1 \otimes t_2) \right) = \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) Alt \circ \sigma(t_1 \otimes t_2) = \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) Alt(t_1 \otimes t_2) = \\ = \tfrac{1}{p!} |S_p| Alt(t_1 \otimes t_2) = Alt(t_1 \otimes t_2).$$ ■

Теперь мы можем доказать ассоциативность внешнего умножения. Имеем

$$(t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 = \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{(r_1 + r_2)! r_3!} \frac{(r_1 + r_2)!}{r_1! r_2!} Alt(Alt(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3) = \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{r_1! r_2! r_3!} Alt((t_1 \otimes t_2) \otimes t_3) = \\ = \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{r_1! r_2! r_3!} Alt(t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3)) = \frac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{(r_2 + r_3)! r_1!} \frac{(r_2 + r_3)!}{r_2! r_3!} Alt(t_1 \otimes Alt(t_2 \otimes t_3)) = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3).$$

☐

Предложение 1.2 **.** *Для любых* $\omega, \theta \in \Lambda_1(V) \equiv V^*$ *имеем*

$$\omega \wedge \theta(X, Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X); \\ \omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega,$$

$X, Y \in V$. *В частности,* $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. По определению внешнего произведения и операции альтернирования имеем

$$\omega \wedge \theta(X, Y) = 2(Alt(\omega \otimes \theta))(X, Y) = 2 \cdot \frac{1}{2!} \left(\sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma)\sigma(\omega \otimes \theta) \right) (X, Y) = \omega \otimes \theta(X, Y) - \omega \otimes \theta(Y, X) = \\ = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X).$$

Вычисляя значения $\omega \wedge \theta$ и $\theta \wedge \omega$ на паре произвольных векторов, легко видеть, что $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$. ☐

Задача 1.36. Докажите, что для ковекторов ω_1, ω_2, ω_3 имеет место формула

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 3! Alt(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3).$$

Обобщите эту формулу на случай внешнего произведения набора из r ковекторов.

Ответ. $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r = r! Alt(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_r)$.

Задача 1.37. Пусть $\Omega \in \Lambda_2(V)$, $\theta \in \Lambda_1(V) \equiv V^*$. Докажите, что

$$\Omega \wedge \theta(X, Y, Z) = \Omega(X, Y)\theta(Z) + \Omega(Y, Z)\theta(X) + \Omega(Z, X)\theta(Y); \quad \Omega \wedge \theta = \theta \wedge \Omega.$$

Пример 1.18. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис векторного пространства V, $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис. Построим n-ковектор $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ и вычислим его значение на векторах $e_1, \ldots, e_n$. Применяя лемму 1.5, получим

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = n! Alt(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(e_1, \ldots, e_n) = n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\sigma(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(e_1, \ldots, e_n).$$

Каждая подстановка $\sigma \in S_n$ будет "по-своему"расставлять аргументы $e_1, \ldots, e_n$, а ковекторы $e^1, \ldots, e^n$ – разбирать их по порядку. Среди всех полученных слагаемых будет только одно отличное от нуля (см. замечание 1.3), а именно, слагаемое соответствующее тождественной подстановке. В результате получим

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

В частности, из этого следует, что n-ковектор $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ отличен от нуль-тензора типа $(n, 0)$. □

Задача 1.38. Докажите, что для произвольных векторов $X_1, \ldots, X_n \in V$ имеет место формула

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(X_1, \ldots, X_n) = det(X^j_{(i)}),$$

где $(X^j_{(i)})$ – матрица, составленная из координат векторов $X_1, \ldots, X_n$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Докажем, что векторное пространство $\Lambda_r(V)$ всех кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ конечномерно.

Теорема 1.6. *Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис векторного пространства V, $(e^1, \ldots, e^n)$ – дуальный базис. Тогда для любого $r = 1, 2, \ldots$ система r-ковекторов $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}\}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, образует базис пространства $\Lambda_r(V)$. В частности, размерность $\Lambda_r(V)$ равна $C^r_n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что система тензоров $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r}\}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, образует базис, нужно, во-первых, убедиться в том, что она линейно независима и, во-вторых, нужно доказать, что любой r-ковектор раскладывается по данной системе r-ковекторов.

1. Рассмотрим линейную комбинацию данных r-ковекторов, равную нулю.

$$\lambda_{i_1 \ldots i_r} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r} = 0; \quad i_1 < \ldots < i_r \tag{1.29}$$

Нужно доказать, что из (1.29) следует, что для любого фиксированного набора индексов $k_1 < \ldots < k_r$ числа $\lambda_{k_1 \ldots k_r} = 0$. Фиксируем такой набор чисел. Пусть числа $(j_{r+1}, \ldots, j_n)$ дополняют набор чисел $k_1, \ldots, k_r$ до подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r+1 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & j_{r+1} & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части равенства (1.29) на $(n-r)$-ковектор $e^{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e^{j_n}$. Получим

$$\lambda_{i_1 \ldots i_r} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r} \wedge e^{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e^{j_n} = 0. \tag{1.30}$$

Заметим, что если среди слагаемых этой суммы имеются слагаемые с двумя одинаковыми индексами, то в силу леммы они равны нулю. Следовательно, ненулевыми могут быть лишь те слагаемые, для которых $(i_1, \ldots, i_r)$ – перестановка индексов $(k_1, \ldots, k_r)$. Поэтому, произведя над индексами $i_1 \ldots i_r$ соответствующую перестановку, перепишем соотношение (1.30) в виде

$$\pm\lambda_{k_1 \ldots k_r} e^{k_1} \wedge \ldots \wedge e^{k_r} \wedge e^{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge e^{j_n} = 0. \tag{1.31}$$

Но так как набор $(k_1 \ldots k_r j_{r+1} \ldots j_n)$ является перестановкой индексов $(1 \ldots n)$, то (1.31) можно записать в виде

$$\pm\lambda_{k_1 \ldots k_r} e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = 0.$$

Подействуем обеими частями этого равенства на вектора $e_1, \dots, e_n$. Тогда согласно примеру 1.18 получим $\pm\lambda_{k_1\dots k_r} = 0$, то есть $\lambda_{k_1\dots k_r} = 0$.

Итак, система r-ковекторов $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\}$, $i_1 < \dots < i_r$ линейно независима.

2. Пусть $\omega \in \Lambda_r(V)$ – произвольный r-ковектор. В частности, $\omega \in \mathfrak{T}_r^0(V)$, а значит, он раскладывается по базису $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}\}$ пространства $\mathfrak{T}_r^0(V)$, то есть $\omega = \omega_{i_1\dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$, где согласно теореме 1.4, $\omega_{i_1\dots i_r}$ – компоненты тензора ω в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Применим к этому соотношению оператор альтернирования. Так как ω – кососимметрический тензор, $Alt(\omega) = \omega$, а значит,

$$\omega = Alt(\omega_{i_1\dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}) = \omega_{i_1\dots i_r} Alt(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}) = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}.$$

В крайне правой части полученной цепочки равенств внешние произведения ковекторов дуального базиса еще не упорядочены по возрастанию. Чтобы сделать это воспользуемся предложением 1.2 и соберем в скобки коэффициенты при одинаковых r-ковекторах $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$:

$$\omega = \tilde{\omega}_{i_1\dots i_r} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}; \quad i_1 < \dots < i_r.$$

Итак, мы получили, что любой r-ковектор раскладывается по данной системе r-ковекторов. □

Построенный базис называется *каноническим* базисом пространства $\Lambda_r(V)$.

Задача 1.39**.** Используя теорему 1.6 и предложение 1.2 , докажите, что для любых $\omega \in \Lambda_r(V)$ и $\theta \in \Lambda_s(V)$ имеем

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs}\theta \wedge \omega.$$

Пример 1.19**.** При доказательстве теоремы 1.6 мы обозначили $\tilde{\omega}_{i_1\dots i_r}$ координаты r-ковектора ω. Выразим их через компоненты этого тензора. Рассмотрим подробно случаи $\omega \in \Lambda_2(V)$ и $\omega \in \Lambda_3(V)$.

Пусть $\omega \in \Lambda_2(V)$. Еще раз повторим доказательство теоремы 1.6 для этого случая. Мы рассматриваем 2-ковектор ω как тензор типа (2,0) и согласно теореме 1.4 раскладываем его по базису $(e^i \otimes e^j)$ тензоров типа (2,0):

$$\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{1.32}$$

Согласно той же теореме 1.4 коэффициенты ω_{ij} в разложении (1.32) (то есть координаты 2-ковектора ω относительно базиса $(e^i \otimes e^j)$) совпадают с его компонентами относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$. Применим к равенству (1.32) оператор альтернирования и воспользуемся формулой (1.28):

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j. \tag{1.33}$$

Здесь мы учли, что 2-ковектор ω кососиметричный тензор, следовательно, принадлежит образу проектора альтернирования, следовательно, $Alt(\omega) = \omega$.

Далее,

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (j < i).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i = j) = 0$ согласно предложению 1.2 . В правой части полученного равенства переобозначим индексы суммирования i и j. Получим

$$\frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (j < i) = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ji} e^j \wedge e^i (i < j).$$

Так как ω – кососимметрический тензор, его компоненты кососимметричны по нижней паре индексов (см. § 1.6.), а значит,

$$\frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ji} e^j \wedge e^i (i < j) = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) + \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j) = \omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j).$$

Откуда получаем

$$\omega = \omega_{ij} e^i \wedge e^j (i < j).$$

Это разложение по базису 2-ковекторов, следовательно, коэффициенты разложения ω_{ij} являются координатами 2-ковектора в базисе $(e^i \wedge e^j (i < j))$.

Итак, мы показали, что для 2-ковекторов их компоненты в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ совпадают с координатами в базисе $(e^i \wedge e^j (i < j))$.

Аналогично рассмотрим 3-ковектор ω. Тогда

$$\omega = \omega_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k,$$

где ω_{ijk} – компоненты 3-ковектора ω в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Применяя оператор альтернирования, получим

$$\omega = \frac{1}{3!}\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k.$$

Тогда

$$\omega = \frac{1}{3!}\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k = \frac{1}{3!}(\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<j<k) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(j<k<i) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(k<i<j) +$$
$$+ \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(j<i<k) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(k<j<i) + \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<k<j))$$

В каждом слагаемом переобозначим индексы суммирования так, чтобы выполнялись неравенства $i < j < k$. Тогда с учетом кососимметричности компонент тензора ω по любой паре нижних индексов и предложению 1.2 получим

$$\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k = 6\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<j<k) = 3!\omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<j<k).$$

Итак, мы получаем, что

$$\omega = \omega_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<j<k),$$

то есть координаты 3-ковектора ω относительно базиса $(e^i \wedge e^j \wedge e^k(i<j<k))$ совпадают с компонентами этого ковектора относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$.

Общий случай r-ковектора ω рассматривается аналогично и получается результат

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r}e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}(i_1 < \dots < i_r).$$

Таким образом, координаты r-ковектора относительно канонического базиса пространства $\Lambda_r(V)$ совпадают с его компонент в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V. □

Пример 1.20**.** Покажем, что произвольного тензора t типа (2,0) верно равенство

$$t_{ij}e^i \wedge e^j = t_{[ij]}e^i \wedge e^j.$$

Здесь индексы i и j не упорядочены в обеих частях равенства.

Действительно,

$$t_{[ij]}e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}t_{ij}e^i \wedge e^j - \frac{1}{2}t_{ji}e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}t_{ij}e^i \wedge e^j + \frac{1}{2}t_{ij}e^i \wedge e^j = t_{ij}e^i \wedge e^j.$$

Во втором слагаемом мы поменяли местами индексы суммирования i и j и воспользовались антикоммутативностью внешнего произведения ковекторов.

Задача 1.40**.** Докажите, что для любого тензора t_{ijk} типа (3,0) имеет место равенство

$$t_{[ijk]}e^i \wedge e^j \wedge e^k = t_{ijk}e^i \wedge e^j \wedge e^k,$$

где индексы i, j, k не упорядочены в обеих частях равенства.

Задача 1.41**.** Докажите, что для произвольного тензора $t \in \mathfrak{T}^0_2(V)$ имеет место равенство

$$t_{ij}e^i \wedge e^j = 2t_{[ij]}e^i \wedge e^j(i<j).$$

Получите соответствующее соотношение для тензора $t \in \mathfrak{T}^0_3(V)$ и обобщите результат на случай произвольного тензора типа $(r, 0)$.

Замечание 1.5**.** Векторное пространство $\Lambda_*(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda_r(V)$ называется *алгеброй Грассмана векторного пространства* V или *внешней алгеброй.*

Вопрос. Если n – размерность векторного пространства V, то чему равна размерность векторного пространства $\Lambda_n(V)$?

§1.8. Операции поднятия и опускания индексов в тензорной алгебре псевдоевклидова пространства V.

Пусть V – векторное пространство.

Определение 1.14**.** *Псевдо-евклидовой структурой* векторного пространства V называется симметрический тензор g типа (2,0), обладающий свойством *невырожденности*, то есть

$$g(X, Y) = 0 \, \forall X \in V \Rightarrow Y = 0.$$

Векторное пространство V с фиксированной на нем псевдо-евклидовой структурой называется *псевдо-евклидовым пространством.*

Определение 1.15. Значение $g(X,Y)$ псевдо-евклидовой структуры g на паре векторов $X, Y \in V$ называется *скалярным произведением* этих векторов.

С помощью псевдо-евклидовой структуры вводится понятие *длины (или нормы)* $||X||$ вектора X по формуле

$$||X|| = \sqrt{g(X,X)}.$$

Заметим, что в псевдо-евклидовом пространстве ненулевые векторы могут иметь вещественную, нулевую и мнимую длину.

Задача 1.42. Выразите скалярное произведение векторов и норму вектора через компоненты псевдо-евклидовой структуры и компоненты векторов.

Ответ: $g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j$, $||X|| = \sqrt{g_{ij}X^iX^j}$.

Евклидовой структурой векторного пространства V называется симметрический тензор g типа (2,0), обладающий свойством *положительной определенности*, то есть

$$g(X,X) \geq 0, \text{ при этом } g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Векторное пространство V с фиксированной на нем евклидовой структурой называется *евклидовым пространством.*

Задача 1.43. Докажите, что евклидово пространство является псевдо-евклидовым, то есть любая евклидова структура невырождена.

Теорема 1.7. *Пусть (V,g) – псевдо-евклидово пространство. Тогда отображение $\ell : V \to V^*$, заданное формулой*

$$\ell(X)(Y) = g(X,Y); \quad X, Y \in V$$

является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Докажем сначала, что отображение ℓ определено корректно, то есть $\ell(X)$ – ковектор, то есть линейное отображение. Действительно, для любых векторов $Y', Y'' \in V$ и произвольных вещественных чисел α, β имеем

$$\ell(X)(\alpha Y' + \beta Y'') = g(X, \alpha Y' + \beta Y'') = \alpha g(X,Y') + \beta g(X,Y'') = \alpha\ell(X)(Y') + \beta\ell(X)(Y''),$$

то есть отображение $\ell(X)$ является линейным, а значит, ковектор.

Далее, докажем, что отображение ℓ является гомоморфизмов векторных пространств, то есть

$$\ell(\alpha X' + \beta X'') = \alpha\ell(X') + \beta\ell(X''),$$

$X', X'' \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Доказательство этого факта аналогично проведенному доказательству.

Осталось доказать, что ℓ – биекция. Инъективность ℓ, то есть $Ker\ell = \{0\}$, следует из невырожденности псевдо-евклидовой метрики g. Сюръективность ℓ следует из того, что

$$dim(Im\ell) = dim\,V - dim(Ker\ell) = n = dim\,V^*.$$

□

Пусть в пространстве V фиксирован базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Найдем компоненты ковектора $\ell(X)$, $X \in V$. По определению компонент получим

$$(\ell(X))_j = g(X, e_j) = g(X^ie_i, e_j) = X^ig(e_i, e_j) = g_{ij}X^i.$$

Итак,

$$(\ell(X))_j = g_{ij}X^i \tag{1.34}$$

Из полученной формулы вытекает название изоморфизма ℓ – *операция опускания индекса у вектора.* Обратный изоморфизм ℓ^{-1} называется *операцией поднятия индекса у ковектора.*

В частности, для вектора e_k базиса получим

$$(\ell(e_k))_j = g_{ij}(e_k)^i = g_{ij}\delta^i_k = g_{kj}.$$

Найдем формулу для ℓ^{-1}, аналогичную формуле (1.34). Рассмотрим компоненты (g_{ij}) псевдо-евклидовой структуры g как $n \times n$- матрицу. Так как g – невырождена, то матрица (g_{ij}) также является невырожденной, а значит, для нее существует обратная матрица. Обозначим ее (g^{ij}). С помощью матрицы (g^{ij}) выразим в формуле (1.34) компоненты X^i (см. замечание 1.2). Получим

$$X^k = g^{kj}(\ell(X))_j.$$

Так как ℓ – изоморфизм, то для любого ковектора u существует единственный вектор X, такой что $u = \ell(X)$. Тогда $X = \ell^{-1}(u)$. С учетом этого последняя формула перепишется в виде

$$(\ell^{-1}(u))^k = g^{kj} u_j. \tag{1.35}$$

Эта формула объясняет введенное название для изоморфизма ℓ^{-1}. Применяя формулу (1.35) к ковектору e^i дуального базиса, получим

$$(\ell^{-1}(e^i))^k = g^{kj}(e^i)_j = g^{kj}\delta^i_j = g^{ki}.$$

С помощью изоморфизмов ℓ и ℓ^{-1} мы можем определить операции поднятия и опускания индексов у любых тензоров. Начнем с примера.

Пример 1.21. Рассмотрим псевдо-евклидову структуру g векторного пространства V и определим отображение $\tilde{g} : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{g}(u, v) = g(\ell^{-1}u, \ell^{-1}v),$$

$u, v \in V^*$ – произвольные ковекторы. В силу линейности g и ℓ^{-1} введенное отображение $\tilde{g}$ будет тензором типа $(0, 2)$.

Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в векторном пространстве V и найдем компоненты тензора $\tilde{g}$ в этом базисе.

$$\tilde{g}(e^i, e^j) = g(\ell^{-1}e^i, \ell^{-1}e^j) = g_{kt}(\ell^{-1}e^i)^k(\ell^{-1}e^j)^t = g_{kt}g^{ik}g^{jt} = \delta^i_t g^{jt} = g^{ij}$$

Заметим, что в приведенной цепочке равенств мы использовали, что псевдо-евклидова структура является симметрическим тензором, а значит, его матрица симметрическая, следовательно, и обратная матрица симметрическая. Итак, мы получили

$$\tilde{g}(e^i, e^j) = g^{ij}.$$

Таким образом, мы получили, что элементы матрицы, обратной матрице псевдо-евклидовой структуры, являются компонентами тензора $\tilde{g}$. Этот тензор называется *контравариантным метрическим тензором.* Будем говорить, что мы получили контравариантный метрический тензор с помощью *операции поднятия индексов у псевдо-евклидовой структуры.* □

Аналогичным образом мы можем определить операции поднятия и опускания индексов у любого тензора. Если у тензора есть и верхние и нижние индексы, то нам нужно договориться на какое место будет подниматься или опускаться индекс. Для этого для каждого тензора будем говорить, в каком порядке берутся его аргументы. Например, для тензора t типа (3,4) пусть порядок аргументов будет таким: $t(X_1, u^1, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3)$. Тогда компоненты этого тензора будут иметь вид $t_i{}^{jk}{}_t{}^{mp}{}_s$. Каждый из индексов будет подниматься или опускаться на место, расположенное над или под ним. Поднимем у тензора t первый нижний и опустим первый верхний индексы. В результате мы получим тензор $\tilde{t}$ того же типа (3,4), который будет задаваться формулой

$$\tilde{t}(v, Y, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3) = t(\ell^{-1}v, \ell Y, u^2, X_2, u^3, u^4, X_3).$$

Если фиксировать базис $(e_1, \dots, e_n)$, то компоненты тензора $\tilde{t}$ будут выражаться через компоненты тензора t следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{t}^i{}_j{}^k{}_t{}^{pm}{}_s = \tilde{t}(e^i, e_j, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = t(\ell^{-1}e^i, \ell e_j, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = t(g^{iu}e_u, g_{jv}e^v, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = \\ = g^{iu}g_{jv}t(e_u, e^v, e^k, e_t, e^p, e^m, e_s) = g^{iu}g_{jv}t_u{}^{vk}{}_t{}^{pm}{}_s.\end{aligned}$$

Обычно волну над получающимся тензором не ставят, а обозначают его той же буквой. К путанице это не приводит, так набор и порядок аргументов у исходного и полученного тензоров отличаются. Итак, полученная нами формула с учетом введенной договоренности будет выглядеть следующим образом

$$\tilde{t}^i{}_j{}^k{}_t{}^{pm}{}_s = g^{iu}g_{jv}t_u{}^{vk}{}_t{}^{pm}{}_s.$$

Пример 1.22. Рассмотрим тензор J типа (1,1). Договоримся записывать его аргументы в следующем порядке $J(X, u)$, $X \in V$, $u \in V^*$. Тогда компоненты этого тензора будут иметь вид $J_i{}^j$. Опустим у тензора J верхний индекс. В результате мы получим тензор типа (2,0), который обозначим Ω. Его компоненты будут иметь вид

$$\Omega_{ij} = g_{tj}J_i{}^t. \tag{1.36}$$

Запишем это равенство в инвариантном виде. Заметим, что по определению матрицы линейного оператора имеет место равенство $J(e_i) = J_i{}^j e_j$, то есть j-я координата вектора $J(e_i)$ есть число $J_i{}^j$. В виде равенства мы можем записать это следующим образом: $(J(e_i))^j = J_i{}^j$. Теперь воспользуемся определением компонент тензора в равенстве (1.36) и линейностью тензоров

$$\Omega(e_i, e_j) = g((J(e_i))^t e_t, e_j) \tag{1.37}$$

Рассмотрим два вектора $X, Y \in V$ и разложим их по базису: $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$. Умножим каждое равенство из (1.37) на соответствующее X^i и Y^j и просуммируем по i и j:

$$\Omega(X^i e_i, Y^j e_j) = g((J(X^i e_i))^t e_t, Y^j e_j).$$

Итак, окончательно получим

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y).$$

В правой части этого равенства мы воспользовались отождествлением тензоров типа (1,1) с линейными операторами. При этом скобки у вектора X опускаются. □

Задача 1.44. Какие изменения нужно произвести в примере 1.22, чтобы получить формулу

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)?$$

Задача 1.45. Докажите, что если $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$, $X, Y \in V$, $J \in \mathfrak{T}^1_1(V)$, g – псевдо-евклидова структура на V, то, опустив у тензора J верхний индекс, мы получим кососимметрический тензор.

§1.9. Псевдо-евклидова структура в пространствах тензоров $\mathfrak{T}^r_0(V)$ и $\mathfrak{T}^0_r(V)$.

Пусть в векторном пространстве V фиксирована псевдо-евклидова структура g. Рассмотрим пространство тензоров $\mathfrak{T}^r_0(V)$. Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести и для пространства тензоров $\mathfrak{T}^0_r(V)$.

Фиксируем в пространстве V базис $(e_1, \ldots, e_n)$ и определим отображение

$$\mathfrak{g} : \mathfrak{T}^r_0(V) \times \mathfrak{T}^r_0(V) \to \mathbb{R},$$

по формуле

$$g(t, T) = g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_r j_r} t^{i_1 \ldots i_r} T^{j_1 \ldots j_r},$$

где g_{ij} – компоненты псевдо-евклидовой структуры g.

Задача 1.46. Используя тензорный закон (1.11), докажите, что отображение $\mathfrak{g}$ не зависит от выбора базиса.

Задача 1.47. Докажите, что отображение $\mathfrak{g}$ линейно по каждому аргументу и симметрично, а значит, является симметрическим тензором типа (2,0) на векторном пространстве $\mathfrak{T}^r_0(V)$.

Предложение 1.3 . *Отображение $\mathfrak{g}$ невырождено.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}(t, T) = 0$ для любого тензора $T \in \mathfrak{T}^r_0(V)$. В частности, оно равно нулю для тензора $T = e_{k_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_r}$, где $e_{k_1}, \ldots, e_{k_r}$ – произвольный набор векторов базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ векторного пространства V, то есть

$$g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_r j_r} t^{i_1 \ldots i_r} (e_{k_1})^{j_1} \ldots (e_{k_r})^{j_r} = 0$$

Преобразовывая левую часть, получим

$$g_{i_1 k_1} \ldots g_{i_r k_r} t^{i_1 \ldots i_r} = 0.$$

Свернем последнее соотношение с компонентами контравариантного метрического тензора (то есть умножим каждое равенство на $g^{k_1 t_1}, \ldots, g^{k_r t_r}$ и просуммируем)

$$g^{k_1 t_1} \ldots g^{k_r t_r} g_{i_1 k_1} \ldots g_{i_r k_r} t^{i_1 \ldots i_r} = 0.$$

Так как компоненты контравариантного метрического тензора образуют матрицу обратную матрице компонент псевдо-евклидовой структуры, то в левой части получим

$$\delta^{t_1}_{i_1} \ldots \delta^{t_r}_{i_r} t^{i_1 \ldots i_r} = 0,$$

то есть $t^{t_1 \ldots t_r} = 0$ для любого набора $t_1, \ldots, t_r$, то есть $t = 0$. □

Следствие 1.3. Отображение $\mathfrak{g}$ является псевдо-евклидовой структурой на векторном пространстве тензоров $\mathfrak{T}^r_0(V)$.

Замечание 1.6. Можно доказать, что псевдо-евклидова структура $\mathfrak{g}$ на векторном пространстве $\mathfrak{T}^r_0(V)$ будет евклидовой тогда и только тогда, когда будет евклидовой псевдо-евклидова структура g на векторном пространстве V.

С помощью псевдо-евклидовой структуры $\mathfrak{g}$ можно ввести понятие нормы тензора $t \in \mathfrak{T}^r_0(V)$.

Определение 1.16. Назовем *нормой* тензора t число $||t|| = \sqrt{\mathfrak{g}(t,t)}$.

Заметим, что в случае псевдо-евклидовой структуры, отличной от евклидовой, норма тензора может быть мнимым числом. В дальнейшем мы встретим такие тензоры.

Пример 1.23. Пусть $X, Y \in V$. Рассмотрим 2-вектор $X \wedge Y$. Его еще называют *бивектором.* Выясним геометрический смысл нормы бивектора $X \wedge Y$.

Пусть фиксирован базис $(e_1, \dots, e_n)$ в векторном пространстве V. Выразим компоненты 2-вектора $X \wedge Y$ через компоненты векторов X и Y. Имеем (см. § 1.7.)

$$(X\wedge Y)^{ij} = (X\wedge Y)(e^i, e^j) = 2!Alt(X\otimes Y)(e^i, e^j) = 2!\cdot\frac{1}{2}(X(e^i)Y(e^j) - X(e^j)Y(e^i)) = X^iY^j - X^jY^i.$$

Тогда норма бивектора $X \wedge Y$ будет иметь вид

$$\begin{gathered}||X\wedge Y||^2 = \mathfrak{g}(X\wedge Y, X\wedge Y) = g_{ij}g_{kt}(X\wedge Y)^{ik}(X\wedge Y)^{jt} = g_{ij}g_{kt}(X^iY^k - X^kY^i)(X^jY^t - X^tY^j) = \\ g_{ij}g_{kt}X^iY^kX^jY^t - g_{ij}g_{kt}X^iY^kX^tY^j - g_{ij}g_{kt}X^kY^iX^jY^t + g_{ij}g_{kt}X^kY^iX^tY^j = \\ 2(g_{ij}g_{kt}X^iY^kX^jY^t - g_{ij}g_{kt}X^iY^kX^tY^j) = 2(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)g(X,Y))\end{gathered}$$

Здесь при приведении подобных слагаемых мы переобозначили индексы суммирования. Итак, мы получили, что

$$||X\wedge Y||^2 = 2\begin{vmatrix} g(X,X) & g(X,Y) \\ g(X,Y) & g(Y,Y)\end{vmatrix}. \tag{1.38}$$

В правой части этого равенства стоит определитель матрицы Грама векторов X, Y. Как известно, это квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах X и Y. Таким образом, мы получаем, что норма бивектора $||X \wedge Y||$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах X и Y, с точностью до постоянного множителя $\sqrt{2}$. $\square$

Замечание 1.7. Пусть в векторном пространстве V фиксирована псевдо-евклидова структура g. Будем называть базис $(e_1, \dots, e_n)$ векторного пространства V *базисом сопряженных векторов*, если $g(e_i, e_j) = 0$ для любых различных i и j от 1 до n. Будем называть базис сопряженных векторов *ортонормированным* относительно псевдо-евклидовой структуры g, если $g(e_a, e_a) = 1$ для некоторых a от 1 до n и $g(e_\alpha, e_\alpha) = -1$ для остальных α от 1 до n. Как мы знаем из курса Элементы многомерной геометрии, количество векторов базиса, которые выдают -1 при действии на них псевдо-евклидовой структуры, не зависит от выбора базиса и называется *индексом* g. Для евклидовой структуры g индекс равен нулю и мы получаем привычный ортнонормированный базис, который задается условием $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Замечание 1.8. Пусть дано векторное пространство V. Напомним, как в нем вводится понятие ориентации. Рассмотрим два базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ и $\tilde{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V. Разложим векторы ε_i, $i = 1, \dots, n$ по векторам базиса E: $\varepsilon_i = C_i^j e_j$. Матрица (C_i^j) называется *матрицей перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$*. Так как векторы, образующие базис, линейно независимы, матрица (C_i^j) невырождена, то есть имеет ненулевой определитель. Будем называть два базиса E и $\tilde{E}$ *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от базиса E к базису $\tilde{E}$ положителен (в противном случае базисы называются *противоположно ориентированными*). Нетрудно показать, что отношение на множестве базисов векторного пространства V быть одинаково ориентированными является отношением эквивалентности. Тогда определено фактормножество по этому отношению эквивалентности. Оно содержит два класса: в каждом классе находятся одинаково ориентированные базисы, а любые два базиса из различных классов противоположно ориентированы. Каждый из полученных классов называется *ориентацией* на векторном пространстве V. Векторное пространство V называется *ориентированным*, если фиксирована одна из ориентаций. Базисы фиксированной ориентации называются *правыми базисами.* Базисы второй ориентации называются *левыми базисами.*

Замечание 1.9. Пусть V^2 – ориентированное двумерное векторное пространство. Рассмотрим пару линейно независимых векторов X и Y из V. Будем называть *ориентированной площадью параллелограмма* P, построенного на векторах X и Y, число, равное площади P, если базис (X, Y) – правый и число, равное минус площади P, если базис (X, Y) – левый.

Пример 1.24. Пусть (ξ_0, η_0) – ортонормированный базис двумерного векторного пространства V. Рассмотрим пару векторов A и B из векторного пространства V, которые образуют базис той же ориентации, что и (ξ_0, η_0). Покажем, что

$$A\wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}}||A\wedge B||\xi_0\wedge\eta_0.$$

Разложим векторы A и B по базису (ξ_0, η_0):

$$A = a_1\xi_0 + a_2\eta_0; \quad B = b_1\xi_0 + b_2\eta_0.$$

Тогда

$$A \wedge B = (a_1\xi_0 + a_2\eta_0) \wedge (b_1\xi_0 + b_2\eta_0) = (a_1b_2 - a_2b_1)\xi_0 \wedge \eta_0.$$

Здесь мы воспользовались линейностью внешнего произведения, его кососимметричностью для векторов и свойством $X \wedge X = 0$ для любого вектора X.

С другой стороны, согласно формуле (1.38) имеем

$$||A \wedge B||^2 = 2\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} = 2(a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Здесь мы воспользовались ортонормированностью базиса (ξ_0, η_0).

Так как число $a_1b_2 - a_2b_1$ является определителем матрицы перехода от базиса (ξ_0, η_0) к базису (A, B) и базисы (A, B) и (ξ_0, η_0) имеют одинаковую ориентацию, получим $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$. Тогда

$$||A \wedge B|| = \sqrt{2}(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Таким образом, мы получаем требуемое равенство.

Задача 1.48. Пусть (ξ_0, η_0) – ортонормированный базис двумерного векторного пространства V. Рассмотрим пару векторов A и B из векторного пространства V. Докажите, что

$$A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}}|A \wedge B|\xi_0 \wedge \eta_0,$$

где $|A \wedge B|$ – ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах A и B.

Глава 2. Тензорная алгебра комплексного векторного пространства.

§2.1. Комплексное линейное пространство.

Комплексное векторное пространство определяется точно так же как и вещественное векторное пространство. Только вещественные числа заменяются на комплексные числа. Аналогичным образом на случай комплексного линейного пространства переносятся определения линейной зависимости векторов, базиса и координат вектора. Приведем полученные определения.

Определение 2.1. Будем называть множество V *комплексным векторным (или комплексным линейным) пространством*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $X, Y \in V$ ставит в соответствие элемент $Z \in V$, называемый *суммой векторов* X *и* Y и обозначаемый $Z = X + Y$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $X \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие элемент $Y \in V$, называемый *произведением вектора* X *на число* λ и обозначаемый $Y = \lambda X$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $X + Y = Y + X$ (коммутативность);

2^0. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $X \in V$ выполняется $X + 0 = X$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $X \in V$ существует элемент $-X \in V$, такой что $X + (-X) = 0$ (элемент $-X$ называется *противоположным* элементу X);

5^0. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$;

6^0. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

7^0. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$;

8^0. $1X = X$,

где $X, Y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства*. Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на комплексное число*.

Определение 2.2. Система векторов $e_1, \ldots, e_n \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{C}$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha^i e_i = 0 \qquad (*)$$

Если равенство $(*)$ выполняется только для чисел $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$, то система векторов $e_1, \ldots, e_n$ называется *линейно независимой*.

Если в комплексном линейном пространстве V существует упорядоченная система n линейно независимых векторов, такая что любой вектор из V представим в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами, то комплексное линейное пространство V называется *конечномерным*, число n называется его *размерностью*. Данная система векторов называется *базисом* комплексного линейного пространства V. Если хотят подчеркнуть, что коэффициенты разложения вектора являются комплексными числами, то говорят "комплексная размерность"пространства V и "комплексный базис"пространства V.

Коэффициенты, с помощью которых вектор представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, называются *координатами этого вектора.*

Очевидно, что координаты суммы векторов комплексного линейного пространства равны суммам соответствующих координат векторов-слагаемых. Координаты произведения вектора на комплексное число равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.

Пример 2.1. Рассмотрим множество $\mathbb{C}^n = \{(z^1, \ldots, z^n), z^i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$. Введем операции сложения элементов из $\mathbb{C}^n$ и умножения элемента из $\mathbb{C}^n$ на комплексное число по формулам

$$(z^1, \ldots, z^n) + (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^n) = (z^1 + \tilde{z}^1, \ldots, z^n + \tilde{z}^n); \quad z(z^1, \ldots, z^n) = (zz^1, \ldots, zz^n).$$

Легко видеть, что все аксиомы комплексного линейного пространства выполняются для множества $\mathbb{C}^n$, а значит, оно является комплексным векторным пространством. $\square$

Задача 2.1. Докажите, что комплексная размерность пространства $\mathbb{C}^n$ равна n.

Теорема 2.1. *Пусть V – комплексное линейное пространство размерности n. Тогда оно является вещественным линейном пространством размерности $2n$.*

Доказательство. Так как множество вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, то все 8 аксиом вещественного линейного пространства выполняются автоматически.

Нам остается только найти базис V как вещественного линейного пространства. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис пространства V. Рассмотрим систему векторов

$$(e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \ldots, \sqrt{-1}e_n). \tag{2.1}$$

Докажем, что эта система векторов "вещественно"линейно независима. Составим линейную комбинацию с вещественными коэффициентами:

$$\alpha^1 e_1 + \ldots \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n = 0.$$

Вынесем за скобку векторы $e_1, \ldots, e_n$.

$$(\alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1)e_1 + \ldots + (\alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n)e_n = 0.$$

В левой части этого равенства стоит линейная комбинация векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис V, то такая линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны 0, то есть $\alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i = 0$, то есть $\alpha^i = \beta^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. По определению это означает, что система векторов (2.1) "вещественно"линейно независима.

Докажем, что любой вектор из V можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (2.1) с вещественными коэффициентами. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ – комплексный базис V, то вектор X можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами:

$$X = z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n.$$

Обозначим $z^i = \alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$ и подставим в предыдущее равенство:

$$X = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n.$$

Итак, система векторов (2.1) является базисом V как вещественного линейного пространства, а значит, его вещественная размерность равна $2n$. $\square$

Комплексное линейное пространство V, рассматриваемое как вещественное линейное пространство, называют *овеществлением* комплексного линейного пространства V и обозначают $V^{\mathbb{R}}$.

Замечание 2.1. Обратите внимание, что в теореме 2.1 сами элементы множества V не изменяются. Меняется структура этого множества. Вначале мы "умеем"умножать векторы на комплексные числа, а затем, "забываем" об этом умении и умножаем те же самые векторы только на вещественные числа.

Задача 2.2. Докажите, что $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 2.2. *На любом вещественном линейном пространстве размерности $2n$ можно ввести структуру комплексного линейного пространства.*

Доказательство. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим оператор канонической комплексной структуры J_0 (см. пример 1.7). Напомним, что он обладает свойством антиинволютивности (см. пример 1.12), то есть

$$J_0 \circ J_0 \equiv (J_0)^2 = -id.$$

Введем в V^{2n} структуру комплексного линейного пространства с помощью оператора канонической комплексной структуры J_0 по формуле

$$zX = \alpha X + \beta(J_0 X), \tag{2.2}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, $X \in V$ – произвольные элементы.

Первые четыре и восьмая аксиомы комплексного линейного пространства такие же как и в вещественном линейном пространстве, а значит, выполняются автоматически. Остается проверить только три аксиомы комплексного линейного пространства, относящиеся к умножению вектора на комплексное число. Докажем, например, что $z(wX) = (zw)X$, $z, w \in \mathbb{C}$, $X \in V$. Остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $w = \xi + \sqrt{-1}\eta$. Тогда с учетом (2.2) получим

$$z(wX) = z(\xi X + \eta J_0 X) = \alpha(\xi X + \eta J_0 X) + \beta J_0(\xi X + \eta J_0 X) = (\alpha\xi - \beta\eta)X + (\alpha\eta + \beta\xi)J_0 X = (wz)X.$$

Здесь мы воспользовались линейностью и антиинволютивностью J_0.

Итак, любое четно мерное вещественное линейное пространство V имеет еще и структуру комплексного линейного пространства. □

Замечание 2.2. Заметим, что доказанная теорема объясняет название тензора J_0 – "оператор комплексной структуры".

Слово "канонический"объясняется тем, что на вещественном линейном пространстве существуют другие тензоры J типа (1,1), которые обладают свойством $J \circ J = -id$. С их помощью аналогично теореме 2.2 можно ввести комплексную структуру на V. Такие тензоры называются *операторами комплексной структуры* на вещественном линейном пространстве V.

Оказывается, что четномерность вещественного линейного пространства является необходимым условием существования на нем оператора комплексной структуры J.

Теорема 2.3. *Пусть V – вещественное линейное пространство, J – оператор комплексной структуры на нем. Тогда (вещественная) размерность пространства V четна.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что размерность V четна, нам нужно предъявить базис V с четным числом векторов.

Пусть $e_1 \in V$ – произвольный ненулевой вектор. Докажем, что пара (e_1, Je_1) линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$\alpha e_1 + \beta J e_1 = 0, \tag{2.3}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Применим к этому равенству оператор J:

$$\alpha J e_1 - \beta e_1 = 0. \tag{2.4}$$

Здесь мы воспользовались линейностью J и свойством антиинволютивности.

Если одно из чисел α, β равно нулю, то из (2.3) следует, что нулю равно и другое число. Предположим, что оба числа отличны от нуля. Тогда умножая (2.3) на α, а (2.4) – на β и вычитая из первого второе, получим $(\alpha^2 + \beta^2)e_1 = 0$. Так как $e_1 \neq 0$, получим $\alpha = \beta = 0$. Итак, пара векторов (e_1, Je_1) линейно независима. Если V совпадает с линейной оболочкой векторов e_1, Je_1, то эта пара является базисом V, следовательно, V имеет размерность 2.

Если $V \neq L(e_1, Je_1)$, то существует вектор e_2, такой что (e_1, Je_1, e_2) – линейно независимая система. Докажем, что в этом случае система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) также является линейно независимой. Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулю.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma J e_1 + \eta J e_2 = 0 \tag{2.5}$$

Подействуем на обе части равенства оператором J:

$$\alpha J e_1 + \beta J e_2 - \gamma e_1 - \eta e_2 = 0 \tag{2.6}$$

Если $\eta = 0$, то из (2.5) мы получим $\alpha = \beta = \gamma = 0$ в силу линейной независимости векторов e_1, Je_1, e_2. Аналогично если $\beta = 0$, то из (2.6) получим, что $\alpha = \gamma = \eta = 0$.

Пусть $\eta \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Умножим (2.5) на β, а (2.6) умножим на $-\eta$ и сложим полученные равенства:

$$(\alpha\beta + \gamma\eta)e_1 + (\beta^2 + \eta^2)e_2 + (\beta\gamma - \alpha\eta)Je_1 = 0.$$

В силу линейной независимости векторов e_1, e_2, Je_1 получим, в частности, что $\beta^2 + \eta^2 = 0$, то есть $\beta = \eta = 0$. Мы пришли к противоречию с предположением, то есть $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 0$. Объединяя все три рассмотренных случая, получаем, что векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) линейно независима.

Если V совпадает с линейной оболочкой векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2), то (e_1, e_2, Je_1, Je_2) является базисом V и размерность V равна 4. В противном случае существует вектор $e_3 \in V$, такой что векторы $e_1, e_2, Je_1, Je_2, e_3$ линейно независима. Тогда аналогично предыдущему доказывается, что система векторов $(e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, Je_3)$ также линейно независима и так далее. Этот процесс конечен, так как конечномерно векторное пространство V.

В результате этого процесса мы получим базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Таким образом, вещественное векторное пространство V четномерно. Построенный базис называется *базисом вещественно адаптированным комплексной структуре* (или, короче, *RA-базисом*). □

Задача 2.3. Докажите, что относительно RA-базиса оператор комплексной структуры имеет матрицу

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$, I_n – единичная матрица порядка n.

Указание. Подействуйте оператором J на вектора RA-базиса, разложите полученный вектор по RA-базису и результат запишите в столбцы матрицы.

Следствие 2.1. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Тогда оно имеет структуру комплексного n-мерного пространства.

Доказательство. Пусть дано вещественное векторное пространство V размерности $2n$. Рассмотрим на нем какой-нибудь оператор комплексной структуры J (например, оператор канонической комплексной структуры J_0). Тогда по теореме 2.3 в V существует RA-базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Докажем, что система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ будет базисом V, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Докажем сначала, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ (комплексно) линейно независимы. Составим линейную комбинацию этих векторов с комплексными коэффициентами и приравняем ее нулю:

$$z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n = 0. \tag{2.7}$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1, \ldots, z^n = \alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n$ и подставим в (2.7):

$$\alpha^1 e_1 + \beta^1 Je_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^n Je_n = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор комплексной структуры J определяет комплексную структуру на V по формуле $(\alpha + \sqrt{-1}\beta)X = \alpha X + \beta JX)$ (см. теорему 2.2). Так как система векторов $e_1, \ldots, e_n$, $Je_1, \ldots, Je_n$ линейно независима, $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = \beta^1 = \ldots = \beta^n = 0$, следовательно, $z^1 = \ldots = z^n$.

Задача 2.4. Докажите, что для любого вектора $X \in V$ существует набор чисел $z^1, \ldots, z^n \in \mathbb{C}$, таких что $X = z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n$.

Итак, мы получили, что $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V как комплексного векторного пространства, а значит, его размерность равна n. □

§2.2. Комплексификация вещественного векторного пространства.

2.1. Пусть V – вещественное векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим множество всех формальных конечных сумм вида

$$Y = z^1 X_1 + \ldots + z^N X_N,$$

где $z^i \in \mathbb{C}$, $X_i \in V$, $i = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$ – произвольное, не фиксированное число. Обратите внимание, что в данных формальных суммах комплексное число z и вектор X вещественного векторного пространства просто стоят рядом. Мы не умеем умножать вектора на комплексные числа (как это было в комплексных линейных пространствах).

Договоримся отождествлять следующие формальные суммы

$$z^1 X_1 + z^2 X_2 = z^2 X_2 + z^1 X_1; \quad z^1 X + z^2 X = (z^1 + z^2)X; \quad zX_1 + zX_2 = z(X_1 + X_2); \quad z(z^1 X) = (zz^1)X, \tag{2.8}$$

где $z^1, z^2, z \in \mathbb{C}$, $X_1, X_2, X \in V$. Будем считать равными две формальные суммы, которые можно привести к одному и тому же виду с помощью отождествлений (2.8).

Множество всех формальных построенных формальных сумм с введенными отождествлениями назовем *комплексификацией вещественного векторного пространства* V и будем обозначать $V^{\mathbb{C}}$. Отметим, что введенное определение не является строгим, но вполне пригодно для работы. Желающие ознакомиться со строгим определением комплексификации векторного пространства могут обратиться к монографии Кобаяши, Номидзу "Основы дифференциальной геометрии"или монографии Кириченко "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях".

В множестве $V^{\mathbb{C}}$ можно ввести структуру вещественного векторного пространства с помощью следующих операций сложения и умножения на вещественное число

$$Y_1 + Y_2 = z^i X_i + \tilde{z}^j \tilde{X}_j; \quad \alpha Y = (\alpha z^i) X_i, \tag{2.9}$$

где $Y_1 = z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$, $Y_2 = \tilde{z}^j \tilde{X}_j \in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Другими словами, чтобы получить сумму двух элементов комплексификации нужно записать одну за другой обе формальные суммы Y_1 и Y_2 и применить введенные отождествления. Чтобы умножить элемент Y на вещественное число, нужно каждое комплексное число формальной суммы умножить на это вещественное число.

Задача 2.5. Докажите, что введенные операции сложения и умножения на вещественное число удовлетворяют всем 8 аксиомам вещественного векторного пространства.

Отметим, что нулевой элемент имеет вид $z^i X_i$, где $z^i = 0$ или $X_i = 0$ для любого индекса i.

Задача 2.6. Докажите, что вещественное векторное пространство V является векторным подпространством вещественного векторного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Указание. Любой элемент из V можно отождествить с формальной суммой вида $1X$.

Будем называть вектора из V *вещественными*, а остальные вектора из $V^{\mathbb{C}}$ – *комплексными векторами.*

Теорема 2.4. *Вещественная размерность пространства* $V^{\mathbb{C}}$ *равна* $2n$.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V. Докажем, что система векторов

$$(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n) \tag{2.10}$$

из $V^{\mathbb{C}}$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства.

Сначала докажем, что эта система векторов линейно независима. Составим линейную комбинацию и приравняем ее нулю:

$$\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^1 \sqrt{-1} e_1 + \ldots + \beta^n \sqrt{-1} e_n = 0,$$

где $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$. С учетом (2.8) получим

$$(\alpha^1 + \beta^1 \sqrt{-1}) e_1 + \ldots + (\alpha^n + \beta^n \sqrt{-1}) e_n = 0.$$

Согласно задаче 2.5 нулевая формальная сумма должна иметь в каждом слагаемом хотя бы один нуль (комплексное число или вектор). Так как вектора базиса $(e_1, \dots, e_n)$ – не нулевые, то нулями будут комплексные числа перед ними, то есть $\alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1} = \ldots = \alpha^n + \beta^n \sqrt{-1} = 0$. Таким образом, $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = \beta^1 = \ldots = \beta^n = 0$ и система векторов (2.10) является линейно независимой (в вещественном смысле).

Чтобы доказать, что любой вектор $Y = z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$ представляется в виде линейной комбинации (с вещественными коэффициентами) векторов (2.10), нужно каждый вектор X_i, входящий в формальную сумму Y разложить по базису $(e_1, \dots, e_n)$ и раскрыть скобки, воспользовавшись определением операций сложения и умножения на вещественное число и отождествлениями. Собрав коэффициенты перед векторами (2.10), мы получим разложение вектора Y по базису (2.10) (подробно распишите самостоятельно).

Итак, мы доказали, что комплексификация произвольного вещественного векторного пространства размерности n является $2n$-мерным вещественным векторным пространством. □

Комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ несет также структуру комплексного линейного пространства. Она задается с помощью операций 2.9, где α – комплексное число. Очевидно, что все 8 аксиом комплексного линейного пространства при этом выполняются.

Следствие 2.2. Комплексная размерность комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ равна n.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n)$ – базис $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства, построенный в теореме 2.4. Докажем, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Задача 2.7. Докажите, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$ (комплексно) линейно независима.

Пусть Y – произвольный элемент из $V^{\mathbb{C}}$. Тогда в силу теоремы 2.4 его можно разложить по базису 2.10 с вещественными коэффициентами:

$$Y = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n = (\alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1})e_1 + \ldots + (\alpha^n + \beta^n\sqrt{-1})e_n.$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1}$, …, $z^n = \alpha^n + \beta^n\sqrt{-1}$. Тогда мы получим разложение вектора Y по векторам $(e_1, \ldots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. □

2.2. Определим в комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ отображение $\tau : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ по формуле

$$\tau(z^i X_i) = \bar{z}^i X_i,$$

где $z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$, черта обозначает комплексное сопряжение. Это отображение называется *оператором комплексного сопряжения*. Очевидно, что оператор комплексного сопряжения является инволютивным, то есть $\tau^2 = id$.

Задача 2.8**.** Докажите, что оператор комплексного сопряжения τ является антилинейным отображением, то есть выполняются два условия:

$$\tau(Y_1 + Y_2) = \tau(Y_1) + \tau(Y_2); \quad \tau(zY) = \bar{z}\tau(Y),$$

$Y, Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 2.3**.** Если рассматривать комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ как вещественное векторное пространство, то оператор комплексного сопряжения будет обычным линейным оператором.

Теорема 2.5**.** *Пусть $X \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда вектор $X \in V$ тогда и только тогда, когда $\tau(X) = X$.*

Доказательство. Пусть $X \in V$. Тогда вектор X мы можем рассматривать как формальную сумму вида $1X$. Применим оператор τ: $\tau(X) = \tau(1X) = 1X = X$.

Обратно, пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$, такой что $\tau(Y) = Y$. Рассмотрим базис $(e_1, \ldots, e_n)$, построенный в следствии 2.2. Заметим, что он состоит из вещественных векторов, то есть из векторов, принадлежащих векторному пространству V. Тогда на разложение вектора Y по этому базису $Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$ можно посмотреть как на формальную сумму. Тогда получим по определению оператора комплексного сопряжения

$$\tau(Y) = \tau(Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n) = \bar{Y}^1 e_1 + \ldots + \bar{Y}^n e_n.$$

С другой стороны, $\tau(Y) = Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$. Откуда получим

$$\bar{Y}^1 e_1 + \ldots + \bar{Y}^n e_n = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n,$$

то есть

$$\operatorname{Im} Y^1 e_1 + \ldots + \operatorname{Im} Y^n e_n = 0.$$

Так как система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ является базисом вещественного векторного пространства V (см. теорему 2.4) и числа $\operatorname{Im} Y^1, \ldots, \operatorname{Im} Y^n \in \mathbb{R}$, то в силу (вещественной) линейной независимости получим, что $\operatorname{Im} Y^1 = \ldots = \operatorname{Im} Y^n = 0$. Тогда вектор Y является линейной комбинацией вещественных векторов $e_1, \ldots, e_n$ с вещественными коэффициентами $\operatorname{Re} Y^1, \ldots, \operatorname{Re} Y^n$, то есть элементом из V. □

2.3. Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Рассмотрим множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ всех $\mathbb{C}$-линейных отображений вида $w : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. Определим в этом множестве операции сложения и умножения на комплексное число стандартным образом

$$(w_1 + w_2)(Y) = w_1(Y) + w_2(Y); \quad (zw)(Y) = zw(Y),\ Y \in V^{\mathbb{C}}. \tag{2.11}$$

Эти операции удовлетворяют всем аксиомам комплексного линейного пространства. Таким образом, множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ наделяется структурой комплексного линейного пространства. Найдем его комплексную размерность.

Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис (не обязательно из вещественных векторов) комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$. Определим отображения $\varepsilon^i : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, которые каждому вектору из $V^{\mathbb{C}}$ ставят в соответствие его i-ю координату относительно базиса $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Очевидно, что это $\mathbb{C}$-линейные отображения.

Задача 2.9**.** Докажите, что отображения ε^i, $i = 1, \ldots, n$ являются линейно независимыми и любой элемент из $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ с комплексными коэффициентами. Другими словами, система линейных отображений $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ образует базис комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Задача 2.10. Покажите, что для дуальных базисов $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ и $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ имеют место равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j)=\delta^i_j$. Докажите, что если для некоторой системы $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$ выполняются равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j)=\delta^i_j$, где $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ – произвольный базис $V^{\mathbb{C}}$, то $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ является базисом $(V^{\mathbb{C}})^*$, дуальным базису $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. Другими словами, свойство $\varepsilon^i(\varepsilon_j)=\delta^i_j$ является характеристическим для дуального базиса.

Решение. Первое утверждение докажите самостоятельно. Мы докажем второе утверждение.

Пусть дан базис $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$ и дана система элементов $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$, удовлетворяющая требованиям $\varepsilon^i(\varepsilon_j)=\delta^i_j$. Докажем сначала, что система $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$z_i\varepsilon^i=0, \tag{2.12}$$

где $z_i\in\mathbb{C}$. Фиксируем произвольный индекс $j=1,\dots,n$ и подействуем обеими частями равенства (2.12) на вектор ε_j. В силу определений суммы и произведения на комплексное число отображений ε^i получим

$$0=(z_i\varepsilon^i)(\varepsilon_j)=z_i\varepsilon^i(\varepsilon_j)=z_i\delta^i_j=z_j.$$

Таким образом, $z_j=0$ для любого $j=1,\dots,n$, то есть система отображений $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ линейно независима.

Покажем, что любое отображение $w\in(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлено в виде линейной комбинации (с комплексными коэффициентами) отображений $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$. Действительно, для любого вектора $Y=Y^j\varepsilon_j\in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y)=w(Y^j\varepsilon_j)=Y^jw(\varepsilon_j)=Y^i\delta^j_iw_j=Y^i\varepsilon^j(\varepsilon_i)w_j=\varepsilon^j(Y^i\varepsilon_i)w_j=w_j\varepsilon^j(Y).$$

Таким образом, $w=w_j\varepsilon^j$, следовательно, $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ – базис $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Наконец, покажем, что для любого $i=1,\dots,n$ отображение ε^i ставит в соответствие любому элементу $Y\in V^{\mathbb{C}}$ его i-ю координату в базисе $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, то есть, что базис $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n)$ является дуальным базису $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. Действительно,

$$\varepsilon^i(Y)=\varepsilon^i(Y^j\varepsilon_j)=Y^j\varepsilon^i(\varepsilon_j)=Y^j\delta^i_j=Y^i.$$

□

Пример 2.2. Пусть $u\in V^*$ – произвольный ковектор. Определим отображение $u^{\mathbb{C}}:V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ по формуле $u^{\mathbb{C}}(z^\alpha X_\alpha)=z^\alpha u(X_\alpha)$, где $z^\alpha X_\alpha\in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Отображение $u^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* ковектора u или *расширением ковектора u на комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ по линейности.* Очевидно, что комплексификация ковектора является $\mathbb{C}$-линейным отображением, то есть принадлежит множеству $(V^{\mathbb{C}})^*$. Отметим еще один очевидный факт $(u^{\mathbb{C}})|_V=u$.

Теорема 2.6. *Любой элемент $w\in(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде конечной формальной суммы вида $z_\alpha(u^\alpha)^{\mathbb{C}}$, где $z_i\in\mathbb{C}$, $u^\alpha\in V^*$, $\alpha=1,\dots N\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V, $(e^1,\dots,e^n)$ – базис дуального векторного пространства (вещественного) V^*. Хорошо известно, что i-й ковектор дуального базиса ставит в соответствие каждому вектору из V его i-ю координату в базисе $(e_1,\dots,e_n)$. Рассмотрим комплексификации ковекторов дуального базиса $(e^i)^{\mathbb{C}}:V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$.

Отметим, что система векторов $(e_1,\dots,e_n)$, являющаяся базисом вещественного векторного пространства V, будет базисом комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство (см. следствие 2.2). Покажем, что отображение $(e^i)^{\mathbb{C}}$ ставит в соответствие каждому элементу из $V^{\mathbb{C}}$ его i-ю координату в базисе $(e_1,\dots,e_n)$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент Y из $V^{\mathbb{C}}$ и разложим его по базису $(e_1,\dots,e_n)$. Разложение $Y=Y^je_j$ мы можем рассматривать как формальную сумму. Тогда

$$(e^i)^{\mathbb{C}}(Y)=(e^i)^{\mathbb{C}}(Y^je_j)=Y^je^i(e_j)=Y^j\delta^i_j=Y^i.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством дуального базиса $e^i(e_j)=\delta^i_j$.

Пусть $w\in(V^{\mathbb{C}})^*$ – произвольный элемент. Тогда для любого элемента $Y=Y^je_j\in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y)=w(Y^je_j)=Y^jw(e_j)=(e^j)^{\mathbb{C}}(Y)w_j=w_j(e^j)^{\mathbb{C}}(Y).$$

Здесь мы обозначили $w(e_j)=w_j$ – это комплексные числа. Таким образом, для любого элемента $w\in(V^{\mathbb{C}})^*$ имеет место равенство $w=w_j(e^j)^{\mathbb{C}}$. В зависимости от ситуации мы можем посмотреть на правую часть этого равенства и как на формальную сумму и как на линейную комбинацию, в которой операции сложения и умножения на комплексное число определены формулами (2.11). □

Следствие 2.3. Система отображений $((e^1)^{\mathbb{C}},\dots,(e^n)^{\mathbb{C}})$ является (комплексным) базисом комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$. Координаты элементов из $(V^{\mathbb{C}})^*$ относительно этого базиса совпадают с их компонентами относительно базиса $(e_1,\dots,e_n)$.

2.4. Пусть t – тензор типа (r,s) на вещественном векторном пространстве V. Будем называть такие тензоры *вещественными.* Определим отображение

$$t^{\mathbb{C}} : \underbrace{V^{\mathbb{C}} \times \ldots \times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{(V^{\mathbb{C}})^* \times \ldots \times (V^{\mathbb{C}})^*}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{C}$$

по формуле

$$t^{\mathbb{C}}(z^{i_1}_{(1)}X^{(1)}_{i_1}, \ldots, z^{i_r}_{(r)}X^{(r)}_{i_r}, \tilde{z}^{(1)}_{j_1}(u^{j_1}_{(1)})^{\mathbb{C}}, \ldots, \tilde{z}^{(s)}_{j_s}(u^{j_s}_{(s)})^{\mathbb{C}}) = z^{i_1}_{(1)} \ldots z^{i_r}_{(r)} \tilde{z}^{(1)}_{j_1} \ldots \tilde{z}^{(s)}_{j_s} t(X^{(1)}_{i_1}, \ldots, X^{(r)}_{i_r}, u^{j_1}_{(1)}, \ldots, u^{j_s}_{(s)}).$$

Здесь мы использовали то, что каждый элемент $V^{\mathbb{C}}$ и $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде конечной формальной суммы указанного вида. Построенное отображение называется *комплексификацией* тензора t или *расширением тензора t по линейности.* Очевидно, что комплексификация тензора t комплексно линейна по каждому аргументу.

Замечание 2.4. Пусть T – вещественный тензор типа $(r,1)$. Тогда он может быть отождествлен с отображением вида

$$t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r\,\text{раз}} \to V$$

(см. курс Тензорная алгебра) по формуле

$$T(X_1, \ldots, X_r, u) = u(t(X_1, \ldots, X_r)).$$

Тогда его комплексификация $t^{\mathbb{C}}$ будет отображением

$$t^{\mathbb{C}} : \underbrace{V^{\mathbb{C}} \times \ldots \times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}} \to V^{\mathbb{C}},$$

которое определяется формулой

$$t^{\mathbb{C}}(Y_1, \ldots, Y_r) = z^{i_1}_{(1)} \ldots z^{i_r}_{(r)} t(X^{(1)}_{i_1}, \ldots, X^{(r)}_{i_r}),$$

где $Y_1 = z^{i_1}_{(1)}X^{(1)}_{i_1}, \ldots, Y_r = z^{i_r}_{(r)}X^{(r)}_{i_r} \in V^{\mathbb{C}}$. Можно доказать, что оба определения комплексификации тензора T типа $(r,1)$ эквивалентны. Мы проведем доказательство этого утверждения в случае тензора типа (1,1), оставляя доказательство общего случая читателю.

Пусть $L : V \to V$ – линейный оператор, с которым отождествляется тензор $T : V \times V^* \to \mathbb{R}$. Тогда они связаны между собой формулой $T(X,u) = u(L(X))$. Построим комплексификации для T и L согласно введенным определениям. Мы получим

$$T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j(u^j)^{\mathbb{C}}) = z^i \tilde{z}_j T(X_i, u^j); \quad L^{\mathbb{C}}(z^i X_i) = z^i L(X_i).$$

Нам нужно показать, что $T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j(u^j)^{\mathbb{C}}) = (\tilde{z}_j(u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i))$. Имеем

$$T^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}_j(u^j)^{\mathbb{C}}) = z^i \tilde{z}_j T(X_i, u^j) = z^i \tilde{z}_j u^j(L(X_i)) = z^i \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}(L(X_i)) = \tilde{z}_j (u^j)^{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i)) = \\ = (\tilde{z}_j(u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^i X_i)).$$

Пример 2.3. Пусть на вещественном векторном пространстве V^2 задана евклидова структура g (см. § 1.8.). Это тензор типа (2,0). Рассмотрим его комплексификацию $g^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, заданную формулой

$$g^{\mathbb{C}}(z^i X_i, \tilde{z}^k \tilde{X}_k) = z^i \tilde{z}^k g(X_i, \tilde{X}_k).$$

Докажем, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры, на комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство. Линейность и симметричность отображения $g^{\mathbb{C}}$ очевидна.

Пусть (e_1, e_2) – ортонормированный базис пространства V. Тогда эти же векторы будут являться базисом комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$, а значит, любой вектор Y представляется в виде их линейной комбинации с комплексными коэффициентами $Y = Y^1 e_1 + Y^2 e_2$. Пусть $g^{\mathbb{C}}(Y, \tilde{Y}) = 0$ для любого вектора $\tilde{Y} \in V^{\mathbb{C}}$. В частности, это равенство верно для вектора $\tilde{Y} = e_1$. В этом случае получим

$$0 = g^{\mathbb{C}}(Y^1 e_1 + Y^2 e_2, e_1) = Y^1 g(e_1, e_1) + Y^2 g(e_2, e_1) = Y^1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что базис (e_1, e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g.

Аналогичным образом получим для $\tilde{Y} = e_2$, что $Y^2 = 0$. Таким образом, $Y = 0$. По определению это означает, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$.

Покажем, что эта структура не является евклидовой. Для этого рассмотрим два вектора $e_1 + \sqrt{-1}e_2$ и $e_1 - \sqrt{-1}e_2$. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2) = g(e_1, e_1) + \sqrt{-1}g(e_1, e_2) + \sqrt{-1}g(e_2, e_1) - g(e_2, e_2) = 1 - 1 = 0.$$

Мы воспользовались тем, что базис (e_1, e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g. Итак, мы получаем, что для ненулевого вектора $e_1 + \sqrt{-1}e_2$

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2) = 0.$$

Мы получаем, что определение евклидовой структуры не выполняется для отображения $g^{\mathbb{C}}$, а значит, $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры. Аналогично можно показать, что для вектора $e_1 - \sqrt{-1}e_2$ имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_1 - \sqrt{-1}e_2) = 0.$$

Такие векторы называются *изотропными*. Другими словами, ненулевой вектор в псевдо-евклидовом пространстве называется *изотропным*, если его длина равна нулю.

Задача 2.11. Докажите, что векторы $(e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$ являются линейно независимыми, а значит, образуют базис $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Отметим еще раз, что этот базис состоит из изотропных векторов. □

Замечание 2.5. Результат примера 2.3 можно обобщить на случай произвольного конечномерного векторного пространства.

Пример 2.4. Пусть J – тензор типа (1,1) на вещественном векторном пространстве V. Докажем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ этого тензора коммутирует с оператором комплексного сопряжения τ.

По определению комплексификации тензора получим

$$\tau \circ J^{\mathbb{C}}(z^i X_i) = \tau(z^i J(X_i)) = \bar{z}^i J(X_i) = J^{\mathbb{C}}(\bar{z}^i X_i) = J^{\mathbb{C}} \circ \tau(z^i X_i). \square$$

Задача 2.12. Пусть g – тензор типа (2,0) на вещественном векторном пространстве V. Докажите, что

$$\overline{g^{\mathbb{C}}(Y_1, Y_2)} = g^{\mathbb{C}}(\tau Y_1, \tau Y_2),$$

где $Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$.

§2.3. Проекторы.

Пусть V – вещественное векторное пространство. Линейное отображение $P : V \to V$ называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Теорема 2.7. *Линейное отображение $P : V \to V$ является проектором тогда и только тогда, когда для любого элемента a из образа $\operatorname{Im} P$ проектора P имеем $P(a) = a$.*

Доказательство. Пусть дан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \operatorname{Im} P$, то есть существует элемент $X \in V$, такой что $a = P(X)$. Тогда с учетом определения проектора получим

$$P(a) = P(P(X)) = P^2(X) = P(X) = a.$$

Обратно, пусть дано линейное отображение $P : V \to V$, такое что для любого элемента $a \in Im\, P$ имеем $P(a) = a$. Нам нужно доказать, что P является проектором, то есть $P^2(X) = P(X)$ для любого элемента $X \in V$. Пусть $X \in V$ – произвольный элемент. Обозначим $a = P(X) \in Im\, P$. Тогда

$$P^2(X) = P(P(X)) = P(a) = a = P(X).$$

□

Пример 2.5. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Рассмотрим отображение $P : V^3 \to V^3$, заданное формулой

$$P(\vec{x}) = \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a},$$

где $\vec{a} \in V^3$ – некоторый фиксированный вектор, в числителе дроби стоит скалярное произведение векторов. Очевидно, что это отображение линейно в силу линейности скалярного произведения векторов.

Образом построенного отображения является множество всех векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$. Пусть $\vec{b} \in \operatorname{Im} P$, то есть $\vec{b} = t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$P(\vec{b}) = P(t\vec{a}) = tP(\vec{a}) = t\frac{(\vec{a}\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = t\vec{a} = \vec{b}.$$

По теореме 2.7 это означает, что отображение P является проектором. Этот проектор называется *проектированием вектора на прямую.* $\square$

Предложение 2.1 . *Если на вещественном векторном пространстве V задан проектор P, то оно распадается в прямую сумму образа и ядра этого проектора*

$$V = \operatorname{Im} P \oplus Ker\, P.$$

Доказательство. Пусть на векторном пространстве V задан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $X \in V$ и обозначим через $b = X - P(X)$. Докажем, что $b \in Ker\, P$. Действительно,

$$P(b) = P(X - P(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = 0.$$

Таким образом, $X = P(X) + b$, то есть представим в виде суммы элемента из образа проектора P и его ядра.

Нам осталось доказать, что $Ker\, P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$. Пусть $X \in Ker\, P \cap \operatorname{Im} P$, то есть $P(X) = 0$ и $X = P(Y)$, $Y \in V$. Тогда

$$0 = P(X) = P^2(Y) = P(Y) = X.$$

Таким образом, $X = 0$. $\square$

Оказывается верно и обратное.

Предложение 2.2 . *Если вещественное векторное пространство V распадается в прямую сумму своих подпространств*

$$V = A \oplus B,$$

то существует проектор $P : V \to V$, такой что $\operatorname{Im} P = A$, $Ker\, P = B$.

Пусть P – проектор на вещественном векторном пространстве V. Рассмотрим отображение $Q = id - P$.

Задача 2.13. Докажите, что отображение Q является проектором.

Этот проектор называется *дополнительным проектором для P.*

Задача 2.14. Докажите, что если Q – дополнительный проектор для P, то P – дополнительный проектор для Q. В связи с этим проекторы P и Q называются *взаимно дополнительными.*

Задача 2.15. Найдите дополнительный проектор к проектору P из примера 2.5 и выясните геометрический смысл этого проектора.

Ответ: $Q(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$. Ортогональное проектирование вектора на плоскость σ, перпендикулярную вектору $\vec{a}$.

Задача 2.16. Пусть P и Q – взаимно дополнительные проекторы. Докажите, что

$$\operatorname{Im} P = Ker\, Q; \quad KerP = \operatorname{Im} Q.$$

§2.4. Комплексификация оператора комплексной структуры. Адаптированный базис.

4.1. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры на нем. В задаче 2.3 был построен так называемый RA-базис, в котором матрица оператора комплексной структуры имеет достаточно "простой"вид. Оказывается для комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ этого оператора можно построить в $V^{\mathbb{C}}$ базис, в котором $J^{\mathbb{C}}$ будет также иметь "простой"вид.

Зададим на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ два отображения σ и $\bar{\sigma}$ формулами

$$\begin{array}{ll} \sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}); \\ \bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Задача 2.17. Докажите, что отображения σ и $\bar{\sigma}$ являются взаимно дополнительными проекторами.

Предложение 2.3 . *Образ проектора σ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$. Образ проектора $\bar{\sigma}$ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $-\sqrt{-1}$.*

Доказательство. Пусть $W \in \operatorname{Im}\sigma$ – произвольный элемент, то есть $W = \sigma(Y)$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$J^{\mathbb{C}}(W) = J^{\mathbb{C}}(\sigma(Y)) = \frac{1}{2}J^{\mathbb{C}} \circ (id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \frac{1}{2}(J^{\mathbb{C}} + \sqrt{-1}id)(Y) = \sqrt{-1}\frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \sqrt{-1}W$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(J^{\mathbb{C}})^2 = -id$ (это непосредственно следует из условия $J^2 = -id$ и определения комплексификации тензора).

Обратно, пусть $W \in V^{\mathbb{C}}$ является собственным вектором оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}(W) = \sqrt{-1}W \tag{2.13}$$

Докажем, что W принадлежит образу проектора σ. Из (2.13) получим, что

$$(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(W) = 0,$$

то есть W принадлежит ядру проектора $\bar{\sigma}$. Так как σ и $\bar{\sigma}$ взаимно дополнительные проекторы, то в силу задачи 2.16 ядро проектора $\bar{\sigma}$ совпадает с образом проектора σ, то есть W принадлежит $\operatorname{Im}\sigma$. Итак, мы доказали, что $\operatorname{Im}\sigma = D_J^{\sqrt{-1}}$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Обозначим образ проектора σ через $D_J^{\sqrt{-1}}$, а образ проектора $\bar{\sigma}$ через $D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда согласно предложению 2.1 и задаче 2.16 получим, что

$$V^{\mathbb{C}} = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}}. \tag{2.14}$$

Замечание 2.6. Проекторы $\sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ и $\bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ являются комплексно линейными отображениями, то есть

$$\sigma(zY) = z\sigma(Y); \quad \bar{\sigma}(zY) = z\bar{\sigma}(Y),$$

$z \in \mathbb{C}$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$.

Предложение 2.4 . *Собственные подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ комплексно сопряжены друг другу, то есть*

$$\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) = D_J^{-\sqrt{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент, то есть $J^{\mathbb{C}}(Y) = \sqrt{-1}Y$. Тогда с учетом примера 2.4 получим

$$J^{\mathbb{C}}(\tau Y) = \tau(J^{\mathbb{C}}Y) = \tau(\sqrt{-1}Y) = -\sqrt{-1}\tau Y,$$

то есть $\tau Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$, то есть $\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) \subset D_J^{-\sqrt{-1}}$.

Аналогичным образом мы можем доказать, что $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) \subset D_J^{\sqrt{-1}}$.

Обратно, пусть $Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда

$$Y = \tau^2 Y = \tau(\tau Y)$$

Как мы видели выше $\tau Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$, то есть $Y \in \tau(D_J^{\sqrt{-1}})$.

Итак, мы доказали требуемое равенство и кроме того, в силу инволютивности τ получили, что

$$\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) = D_J^{\sqrt{-1}}.$$

□

Лемма 2.1. *В принятых обозначениях*

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \bar{\sigma}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Тогда

$$\tau \circ \bar{\sigma}(Y) = \frac{1}{2}\tau(Y + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(Y)) = \frac{1}{2}(\tau(Y) - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(\tau Y)) = \sigma \circ \tau(Y).$$

Здесь мы воспользовались результатами примера 2.4. □

Рассмотрим сужения отображений σ и $\bar\sigma$ на векторное пространство V, которое мы будем рассматривать как комплексное линейное пространство. Отметим, что комплексная структура V отличается от комплексной структуры комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Умножение на комплексные числа в комплексном линейном пространстве V задается формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX, \tag{2.15}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $X \in V$. Изменение комплексной структуры приводит к тому, что отображение $\bar\sigma|_V$ становится комплексно антилинейным, то есть

$$\bar\sigma|_V(X_1 + X_2) = \bar\sigma|_V(X_1) + \bar\sigma|_V(X_2); \quad \bar\sigma|_V(zX) = \bar z\bar\sigma|_V(X).$$

Отображение $\sigma|_V$ остается по-прежнему комплексно линейным. Точнее верны следующие две теоремы.

Теорема 2.8. *Отображение $\sigma|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ является изоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, сохраняющая операции сложения векторов и умножения вектора на комплексное число.*

Доказательство. Из предложения 2.3 следует, что $\sigma|_V(X) \in D_J^{\sqrt{-1}}$ для любого вектора $X \in V$.

Докажем, что отображение $\sigma|_V$ сюрьективно. Пусть $Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент. Рассмотрим вектор $X = Y + \tau Y$. Очевидно, что $\tau X = X$, а значит, по теореме 2.5 вектора X принадлежит векторному пространству V. Покажем, что $\sigma|_V(X) = Y$. Действительно,

$$\sigma|_V(X) = \sigma(Y + \tau Y) = \sigma Y + \tau \circ \bar\sigma Y. \tag{2.16}$$

Здесь мы воспользовались леммой 2.1. Так как $Y \in D_J^{\sqrt{-1}} = \operatorname{Im}\sigma$, то в силу теоремы 2.7 получим $\sigma Y = Y$. Так как проекторы σ и $\bar\sigma$ взаимно дополнительные, то $Y \in Ker\,\bar\sigma$, а значит, $\bar\sigma Y = 0$. Тогда из (2.16) получим, что $\sigma|_V(X) = Y$. Итак, мы доказали, что отображение $\sigma|_V$ сюрьективно.

Докажем инъективность отображения $\sigma|_V$. Пусть $X \in Ker\,\sigma \cap V$. Тогда $X \in \operatorname{Im}\bar\sigma = D_J^{-\sqrt{-1}}$. Так как $\tau X = X$ для $X \in V$ и $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) = D_J^{\sqrt{-1}} = \operatorname{Im}\sigma$, то $X \in Ker\,\sigma \cap \operatorname{Im}\sigma = \{0\}$. Итак, $X = 0$ и отображение $\sigma|_V$ является инъективным.

Нам осталось доказать, что отображение $\sigma|_V$ комплексно линейно, то есть

$$\sigma|_V(X_1 + X_2) = \sigma|_V(X_1) + \sigma|_V(X_2); \quad \sigma|_V(zX) = z\sigma|_V(X),$$

где $X, X_1, X_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Докажем второе соотношение, как более сложное, а первое соотношение доказывается аналогично. Используя (2.21) получим

$$\begin{aligned}\sigma|_V(zX) = \sigma|_V(\alpha X + \beta JX) = \tfrac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)(\alpha X + \beta JX) = \tfrac{1}{2}((\alpha + \sqrt{-1}\beta)X - \sqrt{-1}(\alpha + \sqrt{-1}\beta)JX) =\\ = (\alpha + \sqrt{-1}\beta)\tfrac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX) = z\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$. Отметим, что мы воспользовались тем, что $J^{\mathbb{C}}(X) = J(X)$ для векторов $X \in V$. □

Теорема 2.9. *Отображение $\bar\sigma|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ является антиизоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, для которой выполняется два условия:*

$$\bar\sigma|_V(X_1 + X_2) = \bar\sigma|_V(X_1) + \bar\sigma|_V(X_2); \quad \bar\sigma|_V(zX) = \bar z\bar\sigma|_V(X), \tag{2.17}$$

$X, X_1, X_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Инъективность и сюрьективность отображения $\bar\sigma|_V$ доказывается также как в предыдущей теореме. Докажем второе соотношение из (2.17). Имеем

$$\begin{aligned}\bar\sigma|_V(zX) = \bar\sigma|_V(\alpha X + \beta JX) = \tfrac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)(\alpha X + \beta JX) = \tfrac{1}{2}((\alpha - \sqrt{-1}\beta)X + \sqrt{-1}(\alpha - \sqrt{-1}\beta)JX) =\\ = (\alpha - \sqrt{-1}\beta)\tfrac{1}{2}(X + \sqrt{-1}JX) = \bar z\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

□

Следствие 2.4. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис комплексного линейного пространства V. Тогда система векторов $(\sigma|_V(e_1), \dots, \sigma|_V(e_n), \bar\sigma|_V(e_1), \dots, \bar\sigma|_V(e_n))$ образует базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Доказательство. Так как отображение $\sigma|_V$ является изоморфизмом, то переводит базис векторного пространства V в базис $(\sigma|_V(e_1), \dots, \sigma|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$. Аналогично, антиизоморфизм $\bar\sigma|_V$ переводит базис V в базис $(\bar\sigma|_V(e_1), \dots, \bar\sigma|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$. В силу (2.14) прямая сумма этих подпространств является линейным пространством $V^{\mathbb{C}}$, а значит система векторов $(\sigma|_V(e_1), \dots, \sigma|_V(e_n), \bar\sigma|_V(e_1), \dots, \bar\sigma|_V(e_n))$ будет базисом $V^{\mathbb{C}}$. □

Введем обозначения $\varepsilon_1 = \sigma|_V(e_1), \ldots, \varepsilon_n = \sigma|_V(e_n), \varepsilon_{\hat{1}} = \bar{\sigma}|_V(e_1), \ldots, \varepsilon_{\hat{n}} = \bar{\sigma}|_V(e_n)$. Тогда полученный базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ примет вид $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Такой базис называется *базисом, адаптированным комплексной структуре векторного пространства* V, или, короче, *A- базисом.*

Договоримся, что индексы a, b, c, d, e, f, g, h принимают значения от 1 до n, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ принимают значения от n до $2n$ и $\hat{a} = a+n$, где $2n$ – вещественная размерность векторного пространства V. Используя эти обозначения, A-базис коротко будет записываться $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$.

Задача 2.18. Докажите, что для A-базиса $\tau(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\hat{a}}$.

Указание: используйте лемму 2.1.

Построенный A-базис для комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ хорош тем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в этом базисе имеет диагональный вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Действительно, согласно предложению 2.3 получим

$$(J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a; \quad (J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Используя определение матрицы оператора, получим (2.18).

4.2. Будем называть тензор *вещественным*, если он определен на вещественном векторном пространстве V. Назовем *компонентами вещественного тензора в A-репере* компоненты его комплексификации в A-репере. Исследуем свойства компонент некоторых вещественных тензоров в A-репере.

Пример 2.6. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$ – произвольный A-базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Так как векторное пространство V мы можем рассматривать как подмножество в $V^{\mathbb{C}}$, то произвольный вектор $X \in V$ мы можем разложить по этому A-базису

$$X = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}},$$

где $X^a, X^{\hat{a}}$ – это некоторые комплексные числа, являющиеся координатами вектора X в A-базисе. Докажем, что для координат вектора X имеем

$$\bar{X}^a = X^{\hat{a}}; \quad \bar{X}^{\hat{a}} = X^a, \tag{2.19}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Действительно, используя задачу 2.18, получим

$$\tau X = \tau(X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}) = \bar{X}^a\varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}}\varepsilon_a.$$

Мы воспользовались здесь антилинейностью оператора комплексного сопряжения. Так как $X \in V$, то есть вещественный вектор, то согласно теореме 2.5 получим $\tau X = X$. Тогда

$$X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{X}^a\varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}}\varepsilon_a.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим соотношения (2.19).

Итак, мы показали, что для вещественного вектора координаты в A-базисе попарно комплексно сопряжены. □

Пример 2.7. Пусть ковектор $\omega \in V^*$, где V – $2n$-мерное вещественное векторное пространство, на котором фиксирован оператор комплексной структуры J. Рассмотрим комплексификацию $\omega^{\mathbb{C}}$ ковектора ω и найдем его компоненты относительно A-базиса

$$(\omega^{\mathbb{C}})_a = \omega^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a) = \frac{1}{2}(\omega(e_a) - \sqrt{-1}\omega(Je_a)).$$

Заметим, что $\omega(e_a)$ и $\omega(Je_a)$ – вещественные числа. Тогда комплексно сопрягая обе части последнего равенства, получим

$$\overline{(\omega^{\mathbb{C}})_a} = \frac{1}{2}(\omega(e_a) + \sqrt{-1}\omega(Je_a)) = \omega^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}(e_a)) = (\omega^{\mathbb{C}})_{\hat{a}}.$$

Итак, мы получили, что компоненты (относительно A-базиса) комплексификации $\omega^{\mathbb{C}}$ произвольного ковектора ω, определенного на вещественном векторном пространстве V, будут попарно комплексно сопряжены. □

Замечание 2.7. Аналогично примеру 2.6 можно доказать, что для любого тензора t типа $(r, 0)$ или $(r, 1)$ компоненты в A-базисе его комплексификации будут попарно комплексно сопряжены. При этом при комплексном сопряжении компоненты индексы без крышки переходят в такие же индексы с крышкой и наоборот.

Задача 2.19. Докажите, что компоненты комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в A-базисе попарно комплексно сопряжены.

§2.5. Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве.

Пусть дано комплексное линейное пространство V (комплексной) размерности n.

Определение 2.3. Отображение
$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$
обладающее свойствами
1) аддитивностью по обоим аргументам
$$h(X_1 + X_2, Y) = h(X_1, Y) + h(X_2, Y); \quad h(X, Y_1 + Y_2) = h(X, Y_1) + h(X, Y_2);$$
2) комплексной однородностью по первому аргументу
$$h(zX, Y) = zh(X, Y);$$
3) *комплексной антиоднородностью* по второму аргументу
$$h(X, zY) = \bar{z}h(X, Y);$$
4) свойством *эрмитовости*
$$\overline{h(X, Y)} = h(Y, X),$$
где $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$.

Свойства 1), 2) и 3) называются *линейностью по первому аргументу и антилинейностью по второму аргументу.*

Эрмитова форма h называется *невырожденной*, если
$$h(X, Y) = 0\,\forall Y \in V \;\Rightarrow\; X = 0.$$
Эрмитова форма h называется *положительно определеннной*, если $h(X, X) \geq 0$ для любого $X \in V$, причем $h(X, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$. Положительно определенная эрмитова форма называется *эрмитовой метрикой* на комплексном векторном пространстве V.

Задача 2.20. Докажите, что положительно определенная эрмитова форма является невырожденной.

Замечание 2.8. Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве является аналогом билинейной формы на вещественном векторном пространстве. Соответственно положительно определенная эрмитова форма является аналогом евклидовой структуры на вещественном векторном пространстве.

Пример 2.8. Пусть дано вещественное евклидово векторное пространство (V, g) размерности $2n$ и оператор комплексной структуры J на V, причем $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $X, Y \in V$ (*условие согласованности*). Пару (J, g), удовлетворяющую условию согласованности будем называть *эрмитовой структурой* на вещественном векторном пространстве V.

Задача 2.21. Докажите, что для эрмитовой структуры (J, g) верно равенство
$$g(X, JY) + g(JX, Y) = 0, \tag{2.20}$$
где $X, Y \in V$.

В частности, из этого следует, что $g(X, JX) = 0$ для любого $X \in V$.

Указание: в условии согласованности замените X на JX и воспользуйтесь свойством оператора комплексной структуры $J^2 = -id$. Не забудьте, что евклидова структура симметрична.

Как мы знаем (см. теорему 2.2), в V умножение векторов на комплексные числа задается формулой
$$zX = \alpha X + \beta JX, \tag{2.21}$$
где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $X \in V$, то есть V наделено структурой комплексного линейного пространства.

Определим на V как на комплексном линейном пространстве отображение
$$\langle\langle, \rangle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$
по формуле
$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g(X, Y) + \sqrt{-1}g(X, JY),$$
где $X, Y \in V$. Докажем, что такое отображение будет полуторалинейной формой на V относительно комплексной структуры, заданной формулой (2.21).

Очевидно, что $\langle\langle X_1+X_2,Y\rangle\rangle=\langle\langle X_1,Y\rangle\rangle+\langle\langle X_2,Y\rangle\rangle$. Докажем, что $\langle\langle zX,Y\rangle\rangle=z\langle\langle X,Y\rangle\rangle$. Имеем

$$\langle\langle zX,Y\rangle\rangle=g(\alpha X+\beta JX,Y)+\sqrt{-1}g(\alpha X+\beta JX,JY)=\alpha(g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY))+\beta\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}g(JX,Y)+ \\ +g(JX,JY))=(\alpha+\sqrt{-1}\beta)(g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY))=z\langle\langle X,Y\rangle\rangle$$

Здесь мы воспользовались условием согласованности и соотношением (2.20). Аналогично доказывается антилинейность по второму аргументу, то есть

$$\langle\langle X,Y_1+Y_2\rangle\rangle=\langle\langle X,Y_1\rangle\rangle+\langle\langle X,Y_2\rangle\rangle;\quad \langle\langle X,zY\rangle\rangle=\bar{z}\langle\langle X,Y\rangle\rangle,$$

где $X,Y_1,Y_2,Y\in V$.

Наконец, проверим свойство эрмитовости:

$$\overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle}=\overline{g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY)}=g(X,Y)-\sqrt{-1}g(X,JY)=g(X,Y)+\sqrt{-1}g(JX,Y)=g(Y,X)+ \\ +\sqrt{-1}g(Y,JX)=\langle\langle Y,X\rangle\rangle.$$

Итак, мы показали, что отображение $\langle\langle,\rangle\rangle$ является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве V.

Задача 2.22. Докажите, что эрмитова форма $\langle\langle,\rangle\rangle$ положительно определена.

Задача 2.23. Какой будет эрмитова форма $\langle\langle,\rangle\rangle$, если g будет псевдо-евклидовой структурой? □

Следующая теорема объясняет название "эрмитова структура"для пары (J,g).

Теорема 2.10. *Пусть V – вещественное векторное пространство четной размерности $2n$. Тогда задание эрмитовой структуры (J,g) на нем равносильно заданию положительно определенной эрмитовой формы $\langle\langle,\rangle\rangle$ на V, рассматриваемом как комплексное линейное пространство с комплексной структурой, определенной оператором комплексной структуры J.*

Доказательство. В одну сторону теорема доказана в примере 2.8, то есть мы построили положительно определенную эрмитову форму, используя эрмитову структуру (J,g), где J – оператор комплексной структуры, g – евклидова структура, согласованная с J.

Обратно, пусть дана положительно определенная эрмитова форма $\langle\langle,\rangle\rangle$ на V. Тогда для любых векторов $X,Y\in V$ комплексное число $\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ представим в виде

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle=g(X,Y)+\sqrt{-1}\Omega(X,Y),$$

где $g(X,Y)$ – это вещественная часть числа $\langle\langle X,Y\rangle\rangle$, а $\Omega(X,Y)$ – мнимая. Таким образом, мы получаем два отображения

$$g:V\times V\to\mathbb{R};\quad \Omega:V\times V\to\mathbb{R}$$

задаваемые формулами

$$g(X,Y)=\mathrm{Re}\langle\langle X,Y\rangle\rangle;\quad \Omega(X,Y)=\mathrm{Im}\langle\langle X,Y\rangle\rangle.$$

Задача 2.24. Докажите, что отображения g и Ω вещественно линейны по каждому аргументу.

Докажем, что отображение g симметрично, а отображение Ω кососимметрично. Имеем

$$g(Y,X)=\mathrm{Re}\langle\langle Y,X\rangle\rangle=\mathrm{Re}\,\overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle}=\overline{\mathrm{Re}\langle\langle X,Y\rangle\rangle}=g(X,Y).$$

Здесь мы воспользовались тем, что вещественная часть комплексного числа является вещественным числом, а значит, равна своему комплексному сопряжению. Аналогично получим

$$\Omega(Y,X)=\mathrm{Im}\langle\langle Y,X\rangle\rangle=\mathrm{Im}\,\overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle}=-\mathrm{Im}\langle\langle X,Y\rangle\rangle=-\Omega(X,Y).$$

Таким образом, отображение Ω является кососимметрическим тензором типа (2,0).

В силу свойства эрмитовости формы $\langle\langle,\rangle\rangle$ получим, что

$$\overline{\langle\langle X,X\rangle\rangle}=\langle\langle X,X\rangle\rangle,$$

то есть число $\langle\langle X,X\rangle\rangle$ вещественно. Тогда

$$g(X,X)=\mathrm{Re}\langle\langle X,X\rangle\rangle=\langle\langle X,X\rangle\rangle\geq 0,$$

причем

$$g(X,X)=0\Leftrightarrow\langle\langle X,X\rangle\rangle=0\Leftrightarrow X=0.$$

Здесь мы воспользовались положительной определенностью эрмитовой формы $\langle\langle,\rangle\rangle$. Следовательно, g является евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве V.

Нам осталось построить оператор комплексной структуры J, использую тензор Ω и доказать, что полученная комплексная структура согласована с евклидовой структурой g.

Зададим отображение $J : V \to V$ формулой

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY),$$

$X,Y \in V$. Здесь мы строим отображение J, поднимая один индекс у тензора Ω (см. пример 1.22). Линейность отображение J очевидна. Кроме того,

$$g(X,J^2Y) = \Omega(X,JY) = \mathrm{Im}\langle\langle X,JY\rangle\rangle = \mathrm{Im}\langle\langle X,\sqrt{-1}Y\rangle\rangle = \mathrm{Im}(-\sqrt{-1}\langle\langle X,Y\rangle\rangle) = -\mathrm{Re}\langle\langle X,Y\rangle\rangle = -g(X,Y).$$

Напомним, что умножение на комплексное число в V мы определили по формуле $zX = \alpha + \beta JX$, в частности, $\sqrt{-1}X = JX$ в данном комплексном линейном пространстве V. Кроме того, мы воспользовались антилинейностью эрмитовой формы по второму аргументу.

Следовательно, $g(X,J^2Y+Y) = 0$ для любого $X \in V$. Откуда в силу невырожденности g получим $J^2Y = -Y$ для любого $Y \in V$, то есть $J^2 = -id$, то есть J является оператором комплексной структуры.

Наконец, докажем согласованность евклидовой структуры g и оператора комплексной структуры J. Имеем

$$g(X,JY) = \Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X) = -g(Y,JX) = -g(JX,Y).$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью Ω и симметричностью g. Заменяя Y на JY получим $g(JX,JY) = g(X,Y)$. □

Пример 2.9. Пусть (V,g) – вещественное евклидово векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Как мы знаем (см. § 2.2.), $V^{\mathbb{C}}$ является комплексным линейным пространством.

Определим отображение $H : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$H(X,Y) = 2g^{\mathbb{C}}(X,\tau Y),$$

где $X,Y \in V^{\mathbb{C}}$. Докажем, что отображение H является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. Проверим антилинейность отображения H по второму аргументу (остальные условия проверяются аналогично). Имеем

$$H(X,zY) = 2g^{\mathbb{C}}(X,\tau(zY)) = 2g^{\mathbb{C}}(X,\bar{z}\tau Y) = \bar{z}2g^{\mathbb{C}}(X,\tau Y) = \bar{z}H(X,Y).$$

Здесь мы воспользовались антилинейностью оператора комплексного сопряжения τ и комплексной линейностью комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g.

Наконец, проверим свойство эрмитовости отображения H:

$$\overline{H(Y,X)} = \overline{2g^{\mathbb{C}}(X,\tau Y)} = 2g^{\mathbb{C}}(\tau X,Y) = 2g^{\mathbb{C}}(Y,\tau X) = H(X,Y).$$

Мы воспользовались здесь результатом задачи 2.12 и инволютивностью оператора комплексного сопряжения. Итак, отображение H является эрмитовой формой на комплексном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. □

Теорема 2.11. *Пусть (V,g) – евклидово вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры, согласованный с евклидовой структурой g. Тогда изоморфизм $\sigma|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ и антиизоморфизм $\bar{\sigma}|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ являются изометрией и антиизометрией соответственно, то есть*

$$H(\sigma|_V(X),\sigma|_V(Y)) = \langle\langle X,Y\rangle\rangle; \quad H(\bar{\sigma}|_V(X),\bar{\sigma}|_V(Y)) = \langle\langle Y,X\rangle\rangle,$$

$X,Y \in V$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} H(\bar{\sigma}|_V(X),\bar{\sigma}|_V(Y)) &= 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X),\tau\bar{\sigma}|_V(Y)) = 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X),\sigma|_V(Y)) = \\ = \tfrac{1}{2}g^{\mathbb{C}}(X+\sqrt{-1}JX,Y-\sqrt{-1}JY) &= \tfrac{1}{2}(g(X,Y)-\sqrt{-1}g(X,JY)+\sqrt{-1}g(JX,Y)+g(JX,JY)) = \\ &= g(X,Y)-\sqrt{-1}g(X,JY) = \overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle} = \langle\langle Y,X\rangle\rangle \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tau\circ\bar{\sigma} = \sigma\circ\tau$ и для вещественных векторов $\tau(X) = X$.

Второе соотношение доказывается аналогично. □

Базис $(e_1, \dots, e_n)$ комплексного линейного пространства V называется *ортонормированным* относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$, если $\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab}$, где δ_{ab} – это дельта Кронекера.

Замечание 2.9. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$ комплексного линейного пространства V. Тогда соответствующий вещественно адаптированный базис $(e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$ вещественного векторного пространства V будет ортонормированным базисом относительно евклидовой структуры g.

Действительно,

$$\langle\langle e_a, e_b\rangle\rangle = \delta_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad g(e_a, e_b) + \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) = \delta_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(e_a, e_b) = \delta_{ab} \\ g(e_a, Je_b) = 0 \end{cases}$$

Следствие 2.5. Ортонормированный относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$ базис комплексного линейного пространства V при изометрии $\sigma|_V$ (соответственно, антиизометрии $\bar{\sigma}|_V$) переходит в ортонормированный относительно метрики H базис комплексного линейного пространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ (соответственно, пространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$). Другими словами, отображения $\sigma|_V$ и $\bar{\sigma}|_V$ переводят ортонормированный базис комплексного линейного пространства V в ортонормированный базис комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в следствии 2.5 мы получаем A-базис пространства $V^{\mathbb{C}}$. Но если раньше мы брали произвольный базис в V и действовали на него отображениями σ и $\bar{\sigma}$, то теперь мы рассматриваем только ортонормированные базисы в V. Будем называть такие базисы *адаптированными эрмитовой структуре* (J, g) или, короче, *A-базисами*. Напомним, что A-базисы мы договорились обозначать $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где n – комплексная размерность пространства V.

Так как базисы, адаптированные эрмитовой структуре (J, g) являются частным случаем базисов, адаптированных оператору комплексной структуры J, то матрица комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ в таком базисе имеет вид (2.18). Выясним, какой вид имеет матрица комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g в таком базисе. Согласно введенным обозначениям матрицу $g^{\mathbb{C}}$ мы можем записать в следующем блочном виде

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} g^{\mathbb{C}}_{ab} & g^{\mathbb{C}}_{\hat{a}b} \\ g^{\mathbb{C}}_{a\hat{b}} & g^{\mathbb{C}}_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

где $i, j = 1, \dots, 2n$; $a, b = 1, \dots, n$; $\hat{a} = a + n$. Вычислим элементы каждого из блоков записанной матрицы. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}_{ab} = g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \frac{1}{4}g^{\mathbb{C}}(e_a - \sqrt{-1}Je_a, e_b - \sqrt{-1}Je_b) = \frac{1}{4}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) - \sqrt{-1}g(Je_a, e_b) - g(Je_a, Je_b)) = 0$$

Здесь мы воспользовались определением A-базиса и согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой. Далее,

$$\begin{aligned} g^{\mathbb{C}}_{\hat{a}b} = g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_b) = \tfrac{1}{4}g^{\mathbb{C}}(e_a + \sqrt{-1}Je_a, e_b - \sqrt{-1}Je_b) = \tfrac{1}{4}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b) + \sqrt{-1}g(Je_a, e_b) + g(Je_a, Je_b)) = \\ = \tfrac{1}{2}(g(e_a, e_b) - \sqrt{-1}g(e_a, Je_b)) = \tfrac{1}{2}\delta_{ab} \equiv \tfrac{1}{2}\delta^a_b \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой и замечанием 2.9.

Элементы остальных двух блоков матрицы (2.22) вычисляются аналогично. В результате получим

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I_n \\ \frac{1}{2}I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы убрать коэффициенты $\frac{1}{2}$ в матрице $((g^{\mathbb{C}})_{ij})$, вместо A-базиса рассматривают модифицированный A-базис $(\sqrt{2}\varepsilon_1, \dots, \sqrt{2}\varepsilon_n, \sqrt{2}\varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \sqrt{2}\varepsilon_{\hat{n}})$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие базисы и называть их A-базисами.

Задача 2.25. Докажите, что в модифицированном A-базисе матрицы компонент тензоров J и g имеют вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad ((g^{\mathbb{C}})_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 2.10. Напомним, что мы договорились называть компонентами вещественного тензора в A-базисе компоненты его комплексификации в этом базисе. В дальнейшем, обозначая компоненты комплексификации вещественного тензора, будем опускать знак комплексификации. Например, матрицы из последней задачи будут обозначаться так:

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.10. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, (J, g) – эрмитова структура на нем. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Применим к нему операцию опускания индекса (см. § 1.8.). В результате мы получим некоторый ковектор $u = \ell(X)$. Выразим компоненты этого ковектора в A-базисе через компоненты вектора X. Имеем

$$u_i = g_{ij} X^j$$

где индексы i, j пробегают все значения от 1 до $2n$. Рассмотрим два возможных случая для индекса i.
1) Индекс i принимает значения от 1 до n, то есть $i = a$. Имеем

$$u_a = g_{aj} X^j = g_{ab} X^b + g_{a\hat{b}} X^{\hat{b}} = 0 + \sum_{b=1}^{n} \delta_{ab} X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}}.$$

Здесь индекс j сначала принимает значения от 1 до n (то есть $j = b$), а затем принимает значения от $n+1$ до $2n$ (то есть $j = \hat{b}$). Кроме того, мы воспользовались матрицей евклидовой структуры g в A-базисе.

2) Аналогично получаем, что $u_{\hat{a}} = X^a$.

Итак, компоненты X и $u = \ell(X)$ в A-базисе связаны соотношениями

$$u_a = X^{\hat{a}}; \quad u_{\hat{a}} = X^a. \square$$

Замечание 2.11. Для тензоров произвольного типа действует тот же принцип поднятия и опускания индекса, что и для вектора и ковектора: перемещающийся индекс теряет крышку, если она у него была, и приобретает – если нет.