Краткое руководство к действию по тензорному анализу.

27 февраля 2013 г.

Глава 1. Гладкие многообразия и тензорные поля.

§1.1. Необходимые сведения из топологии.

Определение 1.1. Пусть дано непустое множество X произвольной природы. Семейство $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств множества X называется *топологией на множестве* X, если выполняются следующие условия:
1) для любого подмножества $\{U_\alpha\}$ из τ их объединение $\cup_\alpha U_\alpha$ также принадлежит τ;
2) для любых подмножеств U_1, U_2 из τ их пересечение $U_1 \cap U_2$ также принадлежит τ;
3) пустое множество и все X принадлежат τ.

Множество X с фиксированной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ) или просто X. Подмножества U, принадлежащие топологии τ называются *открытыми*. Любой элемент U из τ, содержащий точку $x \in X$ называется *(открытой) окрестностью* точки x.

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если дополнение в X, то есть множество $X \setminus F$, открыто.

Пример 1.1. Пусть X – произвольное непустое множество, τ – множество всех подмножеств множества X. Легко видеть, что это топология на X. Такая топология называется *дискретной топологией.* $\square$

Пример 1.2. Пусть X – произвольное непустое множество, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Это также топология на X. Такая топология называется *антидискретной.* $\square$

Пример 1.3. Пусть дано топологическое пространство (X, τ) и произвольное непустое подмножество Y в множестве X. Назовем подмножество V из множества Y *открытым*, если существует открытое множество $U \in \tau$, такое что $V = U \cap Y$. Совокупность $\tilde{\tau}$ таких множеств V образует топологию на множестве Y и называется *индуцированной топологией* множества Y. $\square$

Пример 1.4. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – арифметическое векторное пространство. Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ можно ввести евклидову структуру (то есть симметрическую положительно определенную билинейную форму) следующим образом:

$$g(x, y) = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ – произвольные точки. С помощью евклидовой структуры g определяется отображение $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{g(x - y, x - y)} = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}.$$

Отображение ρ является метрикой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Другими словами, ρ позволяет вычислять расстояния между точками в $\mathbb{R}^n$.

Используя метрику ρ, мы можем определить топологию в $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Назовем *открытым шаром* с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbb{R}$ множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < r.$$

Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ будем называть открытым, то есть принадлежащим топологии τ, если для каждой точки $y \in U$ существует открытый шар $B(y, r)$ с центром в этой точке и некоторым радиусом r, принадлежащий U. Совокупность таких множеств образует топологию на $\mathbb{R}^n$. Эта топология называется *метрической или евклидовой топологией.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксирована метрическая топология.

Будем называть множество U из $\mathbb{R}^n$ *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых множеств.

Открытое множество (иногда связное) в $\mathbb{R}^n$ будем называть *областью.*

Любое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ может быть отождествлено с подпространством в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ следующим образом

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \to \tilde{x} = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Заметим, что метрическая топология $\mathbb{R}^n$ совпадает с индуцированной топологией в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемом как подпространство в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ (наделенным метрической топологией). □

Пример 1.5. Пусть X – непустое множество, содержащее бесконечно много элементов, τ – совокупность его подмножеств, дополнения к которым являются конечными множествами, пустое множество и само X. Нетрудно показать, что τ является топологией на X. Эта топология называется *топологией Зарисского.* □

Пример 1.6. Пусть дано топологическое пространство (X, τ) и фактормножество $X/\sim$ по некоторому отношению эквивалентности $\sim$. Рассмотрим произвольное подмножество V из $X/\sim$. Обозначим через U множество всех элементов из X, из которых состоят классы, входящие в V. Тогда назовем множество V *открытым*, если множество U открыто в топологии τ, то есть $U \in \tau$. Совокупность множеств V образует топологию на множестве $X/\sim$. Эта топология называется *фактортопологией.* □

Пример 1.7. Пусть (X, τ) и $(Y, \tilde{\tau})$ – топологические пространства. Тогда на декартовом произведении $X \times Y$ можно ввести топологию следующим образом. Рассмотрим всевозможные декартовы произведения множеств $U \times V$, где $U \in \tau$, $V \in \tilde{\tau}$. Всевозможные объединения множеств вида $U \times V$ назовем открытыми. Такая совокупность множеств образует топологию на декартовом произведении $X \times Y$. Это топология называется *топологией декартова произведения.*

Задача 1.1. Пусть окружность S^1 рассматривается как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Охарактеризуйте открытые множества индуцированной на S^1 топологии. Рассмотрите тор $T^2 = S^1 \times S^1$. Какие подмножества тора будут принадлежать топологии декартова произведения на торе?

Ответ: открытые дуги и их объединения; открытые "криволинейные прямоугольники"и их объединения.

Определение 1.2. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности этих точек.

Пример 1.8. Дискретная и метрическая топологии являются хаусдорфовыми, а антидискретная топология и топология Зарисского являются не хаусдорфовыми топологиями. □

Определение 1.3. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Совокупность $B = \{V\}$ множеств из топологии τ называется *базой* топологии τ, если для каждой точки $x \in X$ и каждого открытого множества $U \in \tau$, содержащего точку x, существует множество $V \in B$, содержащее x и содержащееся в U, то есть $x \in V$ и $V \subset U$.

Из определения базы топологии следует, что любое открытое множество топологического пространства (X, τ) может быть представлено в виде объединения открытых множеств базы топологии.

Пример 1.9. Пусть $\mathbb{R}^n$ – арифметическое векторное пространство, снабженное метрической топологией. Тогда базой метрической топологии будет множество всех шаров с центрами в точках, являющихся наборами рациональных чисел, и рациональными радиусами. □

Задача 1.2. Укажите базу в дискретной и антидискретной топологии.

Топологическое пространство, у которого существует счетная база, называется *топологическим пространством со счетной базой* или *топологическим пространством, удовлетворяющим второй аксиоме счетности.*

Замечание 1.1. Пусть дано отображение $f : X \to Y$ множества X во множество Y. *Полным прообразом точки* $y \in Y$ называется множество всех точек $x \in X$, таких что $f(x) = y$. Полный прообраз точки обозначается $f^{-1}(x)$. *Полным прообразом множества* $V \subset Y$ называется объединение полных прообразов всех точек множества V. Полный прообраз множества V обозначается $f^{-1}(V)$.

Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) – топологические пространства. Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется *непрерывным*, если для любого множества $U \in \tau_2$ его полный прообраз $f^{-1}(U)$ принадлежит топологии τ_1. Другими словами, отображение f называется непрерывным, если полный прообраз любого открытого множества из X_2 открыт.

Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется *открытым*, если образ любого открытого в X_1 множества открыт в X_2. Если f – биекция, то понятие открытости отображения f равносильно непрерывности отображения f^{-1}.

Определение 1.4. Биективное отображение $f : X_1 \to X_2$ топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно и открыто. Другими словами, отображения f и f^{-1} непрерывны.

§1.2. Гладкие отображения областей евклидовых пространств.

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ – евклидовы пространства, $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ – некоторые области в них. Рассмотрим отображение

$$f : U \to V,$$

которое каждую точку $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ переводит в точку $f(x) = (y^1, \ldots, y^m) \in V$. Это отображение задается набором из m функций от n аргументов

$$\begin{array}{l} y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots \\ y^m = y^m(x^1, \ldots, x^n) \end{array} \tag{1.1}$$

или в краткой записи $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, m$.

Определение 1.5**.** Отображение $f : U \to V$ называется *дифференцируемым класса* C^k, $k \geq 1$, если каждая из функций (1.1) имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно.

Если эти функции имеют непрерывные частные производные любого порядка, то отображение f называется *гладким отображением* или *отображением класса* C^∞.

Замечание 1.2**.** Непрерывные отображения называют *отображениями класса* C^0. Если все функции (1.1) аналитические, то есть их ряды Тейлора сходятся в некоторой окрестности каждой точки, то отображение f называется *аналитическим* или *отображением класса* C^ω.

Очевидно, что имеют место следующие включения

$$C^\omega \subset C^\infty \subset \ldots \subset C^k \subset \ldots \subset C^1 \subset C^0 \tag{1.2}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, все отображения будем предполагать гладкими.

Определение 1.6**.** Биективное отображение областей евклидовых пространств $f : U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если отображения f и f^{-1} являются гладкими отображениями.

Будем говорить, что две области $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ *диффеоморфны*, если существует диффеоморфизм $f : U \to V$.

Пример 1.10**.** Докажем, что любые два интервала (a, b) и (c, d) диффеоморфны.

Действительно, рассмотрим отображение $f : (a, b) \subset \mathbb{R}^1 \to (c, d) \subset \mathbb{R}^1$, заданное формулой

$$y = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c.$$

Это линейная функция, а значит, она бесконечно дифференцируема, то есть отображение f является гладким. Если мы выразим x через y, то получим формулу, задающую отображение f^{-1}. Это будет также линейная функция, а значит, обратное отображение гладко и f является диффеоморфизмом.

Замечание 1.3**.** Из курса математического анализа известно, что всякая дифференцируемая функция является непрерывной, а значит, любой диффеоморфизм является гомеоморфизмом. С другой стороны, из курса топологии известно, что области евклидовых пространств гомеоморфны тогда и только тогда, когда размерности этих пространств совпадают. Следовательно, необходимым условием диффеоморфности двух областей евклидовых пространств является совпадение размерностей этих пространств.

§1.3. Гладкие структуры и гладкие многообразия.

В курсе аналитической геометрии мы рассмотрели удобный способ сопоставления точкам пространства наборов из трех вещественных чисел – координат этих точек относительно системы координат. Тогда различные фигуры пространства задавались уравнениями, неравенствами или их системами и совокупностями. В результате к методам геометрии подключился мощный аппарат алгебры. В настоящем параграфе мы займемся аналогичными вещами, но для более сложных пространств, чем наше трехмерное пространство. Аффинную систему координат в них ввести, вообще говоря, невозможно, но мы будем указывать способ сопоставления каждой точке этих пространств набора чисел и укажем методы работы с этими числами.

3.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Локальной картой (или просто картой) на M называется пара (U, φ), где U – открытое подмножество топологического пространства M, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм на некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Подмножество U называется *областью карты*, а отображение φ – *картирующим отображением.*

Пусть $p \in M$ – произвольная точка. Рассмотрим карту (U, φ), содержащую точку p. Тогда картирующее отображение φ поставит ей в соответствие упорядоченный набор чисел $\varphi(p) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Этот набор чисел называется *локальными координатами* точки p в карте (U, φ). Так как гомеоморфизм является биекцией, то различным точкам ставятся в соответствие различные наборы чисел. Таким образом, на локальную карту мы можем посмотреть как на обобщение понятия системы координат.

Пусть даны две локальные карты (U, φ) и (V, ψ) на топологическом пространстве M. Они называются *гладко связанными*, если либо $U \cap V = \emptyset$, либо отображение

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

является диффеоморфизмом областей евклидовых пространств. Отображение $\psi \circ \varphi^{-1}$ будем называть *отображением перехода* от карты (U, φ) к карте (V, ψ) (по аналогии с формулами перехода от одной системы координат к другой).

Определение 1.7. Семейство локальных карт $\mathfrak{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ на топологическом пространстве M называется *атласом*, если
1) семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ образует покрытие M;
2) любая пара локальных карт этого семейства гладко связана.

Будем говорить, что локальная *карта гладко связана с атласом* $\mathfrak{A}$, если она гладко связана с любой картой атласа $\mathfrak{A}$. Атлас называется *максимальным или гладкой структурой* на топологическом пространстве M, если он содержит все локальные карты, гладко связанные с ним. Очевидно, что любой атлас может быть единственным образом дополнен до максимального

Определение 1.8. *Гладким многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором фиксирована гладкая структура.

Размерность образа любой карты этой структуры называется *размерностью многообразия* M и обозначается $dim\, M$.

Замечание 1.4. Если на гладком многообразии существует хотя бы одна гладкая структура, то на нем существует бесконечно много гладких структур.

Замечание 1.5. Что же нам нужно для работы из приведенных определений?

В дальнейшем, работая с гладкими многообразиями, мы будем брать из их гладкой структуры "удобные"атласы. По определению атласа все множество его карт должно покрывать многообразие M (то есть каждая точка многообразия обязательно должна попасть в какую-либо карту) и чем меньше будет этих карт, тем лучше. Каждая карта обеспечивает точку многообразия набором из n чисел (где n – размерность многообразия) – координатами этой точки. Если точка попадает в две карты, то мы должны иметь возможность, зная координаты точки в одной карте, вычислять ее координаты в другой карте. Для этого отображение перехода должно быть, во-первых, биекцией (чтобы иметь возможность пересчитывать координаты точки как из первой во вторую карту, так и из второй в первую) и, во-вторых, гладким вместе с обратным отображением.

3.2. Рассмотрим примеры гладких многообразий.

Пример 1.11. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой (см. пример 1.9).

Пара $(\mathbb{R}^n, id)$ является картой на $\mathbb{R}^n$ (id – тождественное отображение). Очевидно, эта карта образует атлас. Дополняя этот атлас до гладкой структуры, мы получим, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является гладким многообразием размерности n. Такая гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ называется *стандартной гладкой структурой.* $\Box$

Пример 1.12. Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$. Согласно примеру 1.11 она является гладким одномерным многообразием с "удобным"атласом, состоящим из одной карты $(\mathbb{R}, id)$.

Проиллюстрируем на данном примере замечание 1.4. А именно, покажем сначала, что карта $(\mathbb{R}, \varphi)$, где $\varphi(x) = x^{\frac{1}{3}}$ задает гладкую структуру на прямой, отличную от гладкой структуры, задаваемой картой $(\mathbb{R}, id)$. Действительно, для этого нам нужно показать, что карты $(\mathbb{R}, id)$ и $(\mathbb{R}, \varphi)$ не являются гладко связанными. Для этого достаточно показать, что одно из отображений перехода $id \circ \varphi^{-1}$ или $\varphi \circ id^{-1}$ не является бесконечно дифференцируемым. Рассмотрим отображение $\varphi \circ id^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Оно задается формулой $\varphi \circ id^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Вспоминая правила дифференцирования функции одной переменной из курса математического анализа, мы видим, что эта функция не имеет даже первой производной в нуле.

Итак, мы получили, что карты $(\mathbb{R}, id)$ и $(\mathbb{R}, \varphi)$ не являются гладко связанными, а значит, определяют различные гладкие структуры на прямой $\mathbb{R}$.

Более того, можно доказать (докажите самостоятельно), что атласы $(\mathbb{R}, \varphi_0), \ldots, (\mathbb{R}, \varphi_k), \ldots$, где $\varphi_k(x) = x^{2k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ задают на вещественной прямой различные гладкие структуры. $\square$

Пример 1.13. Для любого открытого множества U в пространстве $\mathbb{R}^n$ пара (U, id) является картой, которая составляет атлас. Говорят, что определяемая этим атласом гладкая структура называется *индуцированной* стандартной гладкой структурой на $\mathbb{R}^n$. $\square$

Пример 1.14. Пример 1.13 может быть обобщен на произвольное гладкое многообразие M. Если V – открытое подмножество в M, то картами на V будут пары $(V \cap U_\alpha, (\varphi_\alpha)|_V)$, где $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – атлас многообразия M. Гладкое многообразие V называется *открытым подмногообразием* многообразия M. $\square$

Пример 1.15. Пусть V – n-мерное векторное пространство. Фиксируем в нем базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда каждому вектору $X \in V$ сопоставляется набор из n чисел – координат вектора X в данном базисе. Обозначим это отображение через φ, то есть

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что отображение φ является биекцией.

Введем с помощью отображения φ топологию в пространство V. Будем называть множество $U \subset V$ открытым тогда и только тогда, когда множество $\varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что совокупность таких множеств образует топологию τ на V, то есть пара (V, τ) является топологическим пространством.

Задача 1.3. Покажите, что построенная топология будет хаусдорфовой со счетной базой.

Тоже самое отображение φ позволяет определить гладкую структуру на векторном пространстве V. А именно, пара (V, φ) является картой, образующей атлас.

Задача 1.4. Проверьте, что отображение φ будет гомеоморфизмом во введенных топологиях на V и $\mathbb{R}^n$.

Дополняя этот атлас до гладкой структуры, мы получим гладкую структуру на векторном пространстве V. Будем называть эту гладкую структуру *канонической.*

Задача 1.5. Докажите, что различные базисы из V определяют одну и туже гладкую структуру на векторном пространстве V, то есть карты, определяемые этими базисами, являются гладко связанными.

Указание: возьмите два базиса и вспомните вид формул перехода от одного базиса к другому. $\square$

Пример 1.16. Пусть дано n-мерное векторное пространство V. Напомним, что *n-мерным аффинным пространством, ассоциированным векторному пространству* V, называется непустое множество $\mathscr{A}$, на котором задано отображение

$$\sigma : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to V,$$

удовлетворяющее двум условиям

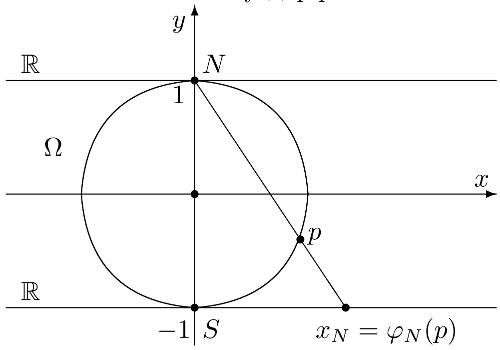
$$1) \forall A \in \mathscr{A}; \forall p \in V \exists! B \in \mathscr{A} : \sigma(A, B) = p; \quad 2) \forall A, B, C \in \mathscr{A} \quad \sigma(A, B) + \sigma(B, C) = \sigma(A, C).$$

Элементы аффинного пространства называются *точками.*

Аналогично примеру 1.15 фиксация аффинной системы координат в $\mathscr{A}$ позволяет ввести в $\mathscr{A}$ топологию и гладкую структуру (проведите подробные рассуждения самостоятельно). Такая гладкая структура называется *канонической* гладкой структурой аффинного пространства.

В частности, гладкая структура существует на евклидовом (точечном) пространстве, то есть аффинном пространстве, для которого фиксирована положительно определенная симметрическая билинейная форма в V. $\square$

Пример 1.17. Простейшим многообразием, для которого не существует атласа из одной карты, является окружность Ω. Рассмотрим на ней топологию индуцированную стандартной топологией $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что эта топология хаусдорфова и имеет счетную базу.



Фиксируем на окружности Ω две диаметрально противоположные точки N и S. Рассмотрим два подмножества точек Ω

$$U_N = \{p \in \Omega, p \neq N\}; \quad U_S = \{p \in \Omega, p \neq S\};$$

В топологии, индуцированной плоскостью $\mathbb{R}^2$, эти два множества будут открытыми (докажите).

Они претендуют на роль областей карт, которые образуют атлас для окружности Ω. Одно условие уже выполнено: объединение множеств U_N и U_S дает всю окружность Ω. Теперь нам нужно задать гомеоморфизмы $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}$ и $\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}$ соответственно, которые сопоставят каждой точке этих множеств некоторое вещественное число – координату этой точки в карте.

Построим подробно гомеоморфизм φ_N. Для гомеоморфизма φ_S рассуждения аналогичны. Расположим на плоскости прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке, причем введем единичный отрезок так, чтобы точка N имела ординату 1. Проведем через точку S прямую, параллельную оси абсцисс, примем точку S за нуль. Тогда каждой точке этой прямой будет соответствовать некоторое вещественное число. Рассмотрим произвольную точку $p \in U_N$ и проведем прямую (Np). При пересечении этой прямой с прямой $y = -1$ мы получим число $\varphi_N(p)$, которое и поставим в соответствие точке p. Это биекция. Очевидно, что образом любой открытой дуги из множества U_N будет открытый интервал на прямой $y = -1$ и, наоборот, прообразом любого открытого интервала прямой $y = -1$ будет открытая дуга множества U_N. Таким образом, биекция φ_N будет гомеоморфизмом.

Итак, мы получили две карты (U_N, φ_N) и (U_S, φ_S) на окружности Ω. Нам осталось доказать, что эти карты гладко связаны, то есть, что отображение

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \varphi_S(U_N \cap U_S) \to \varphi_N(U_N \cap U_S)$$

является диффеоморфизмом. Заметим, что $\varphi_S(U_N \cap U_S) = \varphi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим локальную координату точки окружности Ω в карте (U_N, φ_N) через x_N, а в карте (U_S, φ_S) – через x_S. Найдем формулу, связывающую x_N и x_S.

Рассмотрим произвольную точку $p \in U_N \cap U_S$ и обозначим ее координаты (x_0, y_0) в прямоугольной декартовой системе координат. Тогда число x_N получается как решение системы уравнений, состоящей из уравнения прямой (Np) и уравнения $y = -1$. Имеем

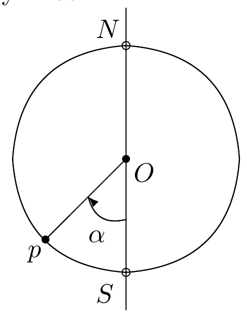
$$\begin{cases} \frac{x-0}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} \\ y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{-2x_0}{y_0-1} \tag{1.3}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$x_S = \frac{2x_0}{y_0+1}. \tag{1.4}$$

Умножим выражение для x_N из равенства (1.3) на (1.4) и учтем, что $(x_0)^2 + (y_0)^2 = 1$, так как точка p лежит на окружности. В результате получим $x_N x_S = 4$. Из этого соотношения мы можем выразить $x_N = \frac{4}{x_S}$. Эта функция бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_S(U_N \cap U_S)$, а значит, отображение $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ является гладким. Аналогично получаем, что отображение $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ гладко, следовательно, отображение $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ является диффеоморфизмом и карты (U_N, φ_N) и (U_S, φ_S) гладко связаны. Итак, построенная пара карт на окружности образует атлас. Обозначим его $\mathfrak{A}_1$.

Построим другой атлас $\mathfrak{A}_2$ на окружности Ω. Опять фиксируем две противоположные точки N и S окружности Ω.

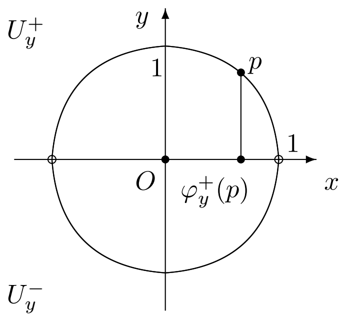


Рассмотрим множество $U_N = \Omega \setminus \{N\}$. Поставим каждой точке $p \in U_N$ в соответствие число $\alpha \in (-\pi, \pi)$, равное ориентированному углу между лучами $[OS)$ и $[Op)$. Тогда отображение $\varphi_N : U_N \to (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ будет гомеоморфизмом, а пара (U_N, φ_N) – локальной картой на окружности Ω. Аналогичным образом строится локальная карта (U_S, φ_S), где $U_S = \Omega \setminus \{S\}$, $\varphi_S(p)$ – ориентированный угол между лучами $[ON)$ и $[Op)$.
Рассмотрим отображение $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \varphi_S(U_N \cap U_S) \to \varphi_N(U_N \cap U_S)$, где $\varphi_S(U_N \cap U_S) = \varphi_N(U_N \cap U_S) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Оно задается формулой

$$(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(\alpha) = \begin{cases} \alpha + \pi, \text{ если } \alpha \in (-\pi, 0); \\ \alpha - \pi, \text{ если } \alpha \in (0, \pi) \end{cases}$$

и поэтому является диффеоморфизмом. Итак, мы построили еще один атлас для окружности, имеющий такие же области карт как и первый атлас, но отличающийся от него картирующими отображениями.

Построим еще один атлас $\mathfrak{A}_3$ для окружности Ω, состоящий из четырех карт. Рассмотрим окружность Ω и выберем прямоугольную декартову систему координат как показано на рисунке.



Рассмотрим четыре множества на окружности Ω:

$$U_y^+ = \{p \in \Omega : y > 0\}; \quad U_y^- = \{p \in \Omega : y < 0\};$$
$$U_x^+ = \{p \in \Omega : x > 0\}; \quad U_x^- = \{p \in \Omega : x < 0\}.$$

Это будут области карт. Построим для каждого из этих множеств картирующее отображение. Подробно мы рассмотрим множество U_y^+. Для остальных множеств построения аналогичны.

Пусть $p \in U_y^+$ – произвольная точка. Опустим из этой точки перпендикуляр на ось (Ox). Основание этого перпендикуляра $\varphi_y^+(p)$ поставим в соответствие точке p. В результате мы получим отображение $\varphi_y^+ : U_y^+ \to (-1, 1)$, которое очевидно, является гомеоморфизмом. Итак, мы получаем карту (U_y^+, φ_y^+).

Для множества U_y^- перпендикуляр опускаем на ту же ось (Ox), а для множеств U_x^+ и U_x^- перпендикуляр из произвольной точки этих множеств опускаем на ось (Oy). Таким образом, мы покрыли окружность Ω четырьмя картами. Нам осталось доказать, что любая пара построенных карт гладко связана. Докажем, например, что гладко связаны карты (U_y^+, φ_y^+) и (U_x^+, φ_x^+).

Рассмотрим отображение

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : \varphi_x^+(U_y^+ \cap U_x^+) \to \varphi_y^+(U_y^+ \cap U_x^+), \tag{1.5}$$

где $\varphi_x^+(U_y^+ \cap U_x^+) = \varphi_y^+(U_y^+ \cap U_x^+) = (0, 1)$. Запишем формулу, задающую это отображение. Для краткости обозначим переменную, обозначающую координату в карте (U_x^+, φ_x^+) через ξ, а координату в карте (U_y^+, φ_y^+) через η. Тогда любой точке $\xi \in (0, 1) \subset (Oy)$ отображение $(\varphi_x^+)^{-1}$ поставит в соответствие точку p дуги окружности, лежащей в первом квадранте, с координатами $(\sqrt{1-\xi^2}, \xi)$ во введенной прямоугольной декартовой системе координат. А отображение φ_y^+ поставит в соответствие точке p число $\sqrt{1-\xi^2}$, принадлежащее интервалу $(0, 1) \subset (Ox)$. Откуда мы видим, что отображение (1.5) будет задаваться формулой

$$\eta = \sqrt{1-\xi^2}.$$

Как мы знаем из курса математического анализа, эта функция гладкая на интервале $(0, 1)$. Кроме того, очевидно, что отображение $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ является биекцией и обратное ему $\xi = \sqrt{1-\eta^2}$ также гладко. Итак, мы получаем, что отображение $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ есть диффеоморфизм и пара карт (U_y^+, φ_y^+) и (U_x^+, φ_x^+) гладко связана.

Таким образом, мы получили еще один атлас на окружности, состоящий из четырех карт.

Можно доказать, что все построенные атласы дополняются до одной и той же гладкой структуры, то есть все карты этих атласов гладко связаны между собой. $\square$

Пример 1.18**.** Результаты примера 1.17 можно обобщить на случай $(n-1)$-*мерной сферы*, то есть множества точек $p \in \mathscr{A}$ n-мерного евклидова пространства, таких что расстояние от каждой точки p до некоторой фиксированной точки $O \in \mathscr{A}$ равно фиксированному вещественному положительному числу. Мы будем обозначать сферу S^{n-1}.

Если в $\mathscr{A}$ фиксировать прямоугольную декартову систему координат, то сфера с центром в начале системы координат радиуса R задается уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = R^2.$$

$n-1$-мерная сфера является $(n-1)$-мерным гладким многообразием. Мы рассмотрим один из возможных атласов сферы. Он содержит всего две карты. Фиксируем на сфере S^{n-1} две диаметрально противоположные точки N и S и возьмем прямоугольную декартову систему координат в $\mathscr{A}$ так, чтобы точки N и S имели соответственно координаты $N(0, \ldots, 0, 1)$, $S(0, \ldots, 0, -1)$. Рассмотрим два множества

$$U_N = \{p \in S^{n-1} : p \neq N\}; \quad U_S = \{p \in S^{n-1} : p \neq S\}.$$

Это будут области карт. Построим картирующее отображение для области U_N. "Поставим сферу на гиперплоскость то есть рассмотрим гиперплоскость, задаваемую уравнением $x^n = -1$. Рассмотрим произвольную точку $p \in U_N$ и проведем прямую (Np). Точку пересечения прямой (Np) и гиперплоскости $x^n = -1$ обозначим $\varphi_N(p)$. На эту точку мы можем посмотреть как на набор из $(n-1)$ вещественного числа – это первые $(n-1)$ координаты этой точки в прямоугольной декартовой системе координат. Таким образом, мы получаем отображение

$$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^{n-1}$$

Также как в случае окружности доказывается, что отображение φ_N является гомеоморфизмом. Это отображение называется *стереографической проекцией*.

Аналогичным образом строится гомеоморфизм $\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^{n-1}$. Здесь "на сферу ставится гиперплоскость"$x^n = 1$. Итак, мы получаем две карты на сфере S^{n-1}.

Аналогично случаю окружности можно доказать, что построенные карты гладко связаны. В результате мы получим атлас на сфере S^{n-1}, который дополняется до гладкой структуры. Эту гладкую структуру мы назовем *канонической гладкой структурой* на сфере и именно с ней будем работать.

Пример 1.19**.** Пусть M и N – гладкие многообразия размерностей n и m соответственно с гладкими структурами, определяемыми атласами

$$\mathfrak{A}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}; \quad \mathfrak{A}_N = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}.$$

Тогда топологическое пространство $M \times N$ снабжается гладкой структурой, порожденной атласом

$$\{(W_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta})\}, \quad W_{\alpha\beta} = U_\alpha \times V_\beta,\ \chi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \times \psi_\beta.$$

Это многообразие размерности $m+n$ называется *декартовым произведением многообразий* M и N. Очевидно, что это определение распространяется на произвольное конечное число сомножителей. Например, декартово произведение n окружностей является гладким n-мерным многообразием, которое называется *n-мерным тором*.

Задача 1.6**.** Постройте карты на двумерном торе в явном виде.

3.3. Введем понятие ориентации на гладком многообразии M размерности n.

Напомним, что диффеоморфизм областей евклидовых пространств $f : U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ задается системой из n функций с n переменными

$$\begin{aligned}
&y^1 = y^(x^1, \ldots, x^n);\\
&\ldots\\
&y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n).
\end{aligned}$$

Матрица $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$, составленная из частных производных этих функций, называется *матрицей Якоби* диффеоморфизма f. Как известно из курса математического анализа определитель этой матрицы (*якобиан*) для диффеоморфизма отличен от нуля. Так как якобиан диффеоморфизма является гладкой функцией, она в каждой точке области U (здесь важна связность этого множества) эта функция имеет один и тот же знак. Таким образом, множество всех диффеоморфизмов $f : U \to V$ распадается на два множества: диффеоморфизмы с положительным якобианом и диффеоморфизмы с отрицательным якобианом. Множество диффеоморфизмов $f : U \to V$ с положительным якобианом будем обозначать $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Пусть (U, φ), (V, ψ) – две карты многообразия M. Будем говорить, что данные карты *согласованы с диффеоморфизмами множества* $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, если отображение $\psi \circ \varphi^{-1}$ принадлежит множеству $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Назовем атлас $\mathfrak{A}$ многообразия M *согласованным с множеством диффеоморфизмов* $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, если любая пара его карт согласована с диффеоморфизмами множества $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.9**.** *Ориентированным гладким многообразием* будем называть хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, для которого существует атлас, согласованный с множеством диффеоморфизмов $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Ориентируемая гладкая структура многообразия однозначно порождает гладкую структуру многообразия. Но не каждая гладкая структура получается таким образом. Если гладкая структура многообразия получена из ориентированной гладкой структуры, то она называется *ориентируемой*.

Замечание 1.6**.** Ориентируемое многообразие допускает в точности две ориентации.

Сфера S^{n-1}, $\mathbb{R}^n$, любое векторное пространство, любое аффинное пространство, рассматриваемые как гладкие многообразия, являются ориентируемыми.

§1.4. Гладкие отображения многообразий. Алгебра гладких функций гладкого многообразия.

Пусть даны гладкие многообразия M^n и N^m размерностей n и m соответственно.

Гладким отображением многообразия M в многообразие N называется отображение

$$f : M \to N,$$

такое что для любой точки $p \in M$ существует локальная карта (U, φ), существует локальная карта (V, ψ) для точки $f(p) \in N$ и отображение
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \tag{1.6}$$
является гладким отображением областей евклидовых пространств.

Как мы знаем (см. § 1.2.) отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ задается системой функций
$$\begin{array}{l} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n); \\ \dots \\ y^m = y^m(x^1, \dots, x^n). \end{array} \tag{1.7}$$
Эти функции называются *координатным выражением* отображения f в паре карт (U, φ), (V, ψ). Очевидно, что функции (1.7) должны быть бесконечно дифференцируемыми.

Замечание 1.7. Определение гладкого отображения многообразий не зависит от выбора локальной карты, содержащей точку p.

Действительно, пусть $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – другая карта, содержащая точку p. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\tilde{U} \subset U$. Обозначим через $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ соответствующую карту многообразия N, содержащую точку $f(p)$. Тогда отображение
$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \to \tilde{\psi}(\tilde{V}) \tag{1.8}$$
можно представить в виде
$$\tilde{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}.$$
Так как карты (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, а также карты (V, ψ) и $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ гладко связаны, то отображения $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ являются диффеоморфизмами областей евклидовых пространств, а значит, гладки. Следовательно, отображение $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ гладко как композиция таковых.

В литературе также встречается определение гладкого отображения многообразий, в котором требуется гладкость отображения $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ для любой карты. Такое определение не удобно для работы с конкретными примерами многообразий.

Если гладкое отображение f многообразий M и N является биекцией и обратное отображение f^{-1} также гладко, то f называется *диффеоморфизмом*, а многообразия M и N при этом называются *диффеоморфными.*

Рассмотрим пример гладкого отображения многообразий. Возьмем в качестве многообразия N вещественную прямую $\mathbb{R}$ со стандартной гладкой структурой из примера 1.11 и рассмотрим гладкое отображение многообразий:
$$f : M \to \mathbb{R}.$$
Оно называется *гладкой функцией* на многообразии M. Другими словами, отображение $f : M \to \mathbb{R}$ называется гладкой функцией на M, если для любой точки $p \in M$ существует карта (U, φ), содержащая эту точку, такая что отображение
$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$
является гладкой функцией n переменных (в стандартном смысле математического анализа). Обратите внимание, что в этом случае отображение ψ является тождественным, так как стандартный атлас на $\mathbb{R}$ состоит из одной карты $(\mathbb{R}, id)$.

В карте (U, φ) функция $f \circ \varphi^{-1}$ аналитически задается уравнением вида
$$y = f(x^1, \dots, x^n).$$
Допуская некоторую вольность речи, в дальнейшем будем говорить, что этим уравнением задается функция f.

Обозначим множество всех гладких функций на многообразии M через $C^\infty(M)$. Это множество обладает структурой вещественной ассоциативной, коммутативной алгебры с единицей, вообще говоря, бесконечномерной. Другими словами, во множестве $C^\infty(M)$ введены операции сложения элементов и умножения элемента на вещественное число:
$$\begin{array}{ll} f + g : M \to \mathbb{R}; & (f+g)(p) = f(p) + g(p); \\ \lambda f : M \to \mathbb{R}; & (\lambda f)(p) = \lambda f(p), \end{array}$$
где $f, g \in C^\infty(M)$, $p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие 8 аксиомам векторного пространства. Кроме того, определена операция умножения элементов
$$fg : M \to \mathbb{R}; \quad (fg)(p) = f(p)g(p),$$

удовлетворяющая свойствам левой и правой дистрибутивности

$$f(g+h)=fg+fh;\quad (f+g)h=fh+gh,$$

где $f,g,h\in C^\infty(M)$. Выполнение этих условий означает, что $C^\infty(M)$ обладает структурой алгебры. Ассоциативность, коммутативность и наличие единицы означает следующее

$$\begin{array}{l}(fg)h=f(gh);\\ fg=gf;\\ \exists e\in C^\infty(M):\forall f\in C^\infty(M)\,ef=f.\end{array}$$

В качестве функции e выступает функция, которая каждой точке многообразия M ставит в соответствие число 1. Нетрудно (но достаточно долго) проверить, что все эти условия выполняются для множества гладких функций на многообразии M.

Оказывается, что вся информация о гладкой структуре хаусдорфова топологического пространства со счетной базой содержится в его алгебре гладких функций. Подробно мы не будем изучать этот вопрос и интересующихся отправим к книге Хелгасон "Дифференциальная геометрия и симметрические пространства 1964 или к монографии В.Ф.Кириченко "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях Прометей, 2003.

§1.5. Касательные векторы и касательные пространства.

5.1. Рассмотрим еще один пример гладкого отображения многообразий. В качестве первого многообразия рассмотрим интервал I вещественной прямой $\mathbb{R}$, который содержит число 0. Так как интервал является отрытым множеством прямой, на нем индуцируется гладкая структура стандартной гладкой структурой $\mathbb{R}$. А именно, в качестве единственной карты, покрывающей весь интервал I возьмет карту (I,id). Вторым многообразием будет гладкое n-мерное многообразие M.

Гладким путем или гладкой кривой на гладком многообразии M назовем гладкое отображение $\gamma:I\to M$.

Множество $\gamma(I)$ может не покрываться одной картой на M. Так как все наши рассуждения носят локальный характер, то мы либо будем сужать интервал I так, чтобы $\gamma(I)$ покрывалось картой, либо будем накрывать $\gamma(I)$ несколькими картами (в зависимости от конкретной ситуации). В дальнейших рассуждениях, говоря о выборе карты на M, мы будем считать, что она содержит образ некоторой окрестности нуля интервала I.

Рассмотрим локальную карту (U,φ) на M с координатами $(x^1,\dots,x^n)$. Обозначим $\gamma^*=\varphi\circ\gamma\circ id\equiv\varphi\circ\gamma$. Из определения гладкого отображения многообразий следует, что отображение $\gamma^*:I\subset\mathbb{R}\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ является гладким отображением. Оно задается функциями

$$\begin{array}{l}x^1=x^1(t);\\ \dots\\ x^n=x^n(t).\end{array}$$

Опять допуская вольность речи, будем называть эти функции *параметрическим заданием пути* γ, а переменную t, которая принимает значения из интервала I – *параметром.*

Пусть даны два пути $\gamma_1:I\to M$ и $\gamma_2:I\to M$, такие что $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p\in M$. Если на M фиксировать карту (U,φ), содержащую точку p, то эти пути будут задаваться следующим образом

$$\gamma_1:\left\{\begin{array}{l}x^1=x^1(t);\\ \dots\\ x^n=x^n(t).\end{array}\right.\qquad \gamma_2:\left\{\begin{array}{l}x^1=\tilde{x}^1(t);\\ \dots\\ x^n=\tilde{x}^n(t).\end{array}\right.$$

Будем называть эти пути *эквивалентными* (или *соприкасающимися*) в точке p и обозначать $\gamma_1\sim\gamma_2$, если в карте (U,φ) многообразия M выполняется соотношение

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}x^i(t)=\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\tilde{x}^i(t),\quad i=1,\dots,n. \tag{1.9}$$

Докажем, что понятие эквивалентности путей не зависит от выбора локальной карты. Пусть (V,ψ) – другая локальная карта, содержащая точку p. Пусть гладкие пути γ_1 и γ_2 задаются в локальной карте (V,ψ) функциями $y^i=y^i(t)$ и $y^i=\tilde{y}^i(t)$ соответственно. Нам нужно доказать, что

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}y^i(t)=\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\tilde{y}^i(t),\quad i=1,\dots,n.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}y^i(t)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}y^i(x^1(t),\dots,x^n(t))=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}x^j(t)=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\tilde{x}^i(t)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\tilde{y}^i(t)\,\square$$

Доказанный факт позволяет условие (1.9) записывать и в таком виде

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma_1(t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma_2(t).$$

Это не приводит к недоразумениям и расшифровывается как (1.9).

Пример 1.20. В качестве примера рассмотрим два пути на многообразии M, которые в карте (U,φ) задаются функциями $\gamma_1 : x^i = a^i t$, где $a^i \in \mathbb{R}$ – некоторые константы и $\gamma_2 : x^i = b^i t^3 + a^i t$, где $b^i \in \mathbb{R}$ – некоторые константы, $i = 1,\dots,n$. Тогда точки $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(0)$ имеют одни и те же координаты $(0,\dots,0)$ в карте (U,φ), а значит, эти точки совпадают. Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(a^i t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(b^i t^3 + a^i t) = a^i,$$

следовательно, пути γ_1 и γ_2 являются эквивалентными.

Задача 1.7. Приведите пример не эквивалентных гладких путей.

Отношение эквивалентности на множестве путей, проходящих через фиксированную точку p многообразия M является отношением эквивалентности. Тогда множество всех гладких путей, проходящих через точку p, распадается на классы по этому отношению эквивалентности. Каждый класс содержит все соприкасающиеся пути, проходящие через точку p. Такой класс $[\gamma]$ называется *касательным вектором* к многообразию M в точке p. Будем обозначать касательные векторы малыми греческими буквами $\xi,\eta,\zeta,\dots$

Совокупность всех касательных векторов обозначается $T_p(M)$ и называется *касательным пространством* к многообразию M в точке p.

Пусть (U,φ) – карта на многообразии M, содержащая точку p, $\xi = [\gamma] \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Рассмотрим произвольный путь $\gamma : x^i = x^i(t)$, принадлежащий этому вектору. Тогда определен набор чисел $(\xi^1,\dots,\xi^n)$ по формуле

$$\xi^i = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}x^i(t); \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.10}$$

Эти числа называются *координатами* вектора ξ в карте (U,φ).

В силу условия (1.9) координаты вектора не зависят от выбора пути из класса $[\gamma]$.

Предложение 1.1 **.** *Пусть на многообразии M даны две карты (U,φ) с координатами $(x^1,\dots,x^n)$ и (V,ψ) с координатами $(y^1,\dots,y^n)$, содержащие точку p. Обозначим координаты касательного вектора ξ относительно карты (U,φ) через $(\xi^1,\dots,\xi^n)$, а координаты этого же вектора относительно карты (V,ψ) – через $(\eta^1,\dots,\eta^n)$. Тогда получим*

$$\eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)}\xi^j, \tag{1.11}$$

где $i,j = 1,\dots,n$.

Доказательство. Рассмотрим гладкий путь $\gamma \in \xi$. Пусть относительно карт (U,φ) и (V,ψ) он задается функциями

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ \dots \\ x^n = x^n(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} y^1 = y^1(t) \\ \dots \\ y^n = y^n(t), \end{cases}$$

соответственно.

Напомним, что если даны две карты, такие что $U \cap V \neq \emptyset$, то определено отображение перехода

$$\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V),$$

которое "пересчитывает"координаты точки из первой карты во вторую (см. (1.1)), следовательно, заданы гладкие функции

$$\begin{aligned} &y^1 = y^1(x^1,\dots,x^n) \\ &\dots \\ &y^n = y^n(x^1,\dots,x^n). \end{aligned}$$

Тогда, используя определение координат вектора (1.10) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\eta^i = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}y^i(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}y^i(x^1(t),\dots,x^n(t)) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}x^j(t) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)}\xi^j.$$

Напомним, что матрица $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)}\right)$ называется *матрицей Якоби* отображения $\psi\circ\varphi^{-1}$ в точке $\varphi(p)$. □

Пример 1.21. Рассмотрим окружность Ω из примера 1.17 с атласом $\mathfrak{A}_3$. Рассмотрим две карты на ней (U_y^+, φ_y^+) и (U_x^+, φ_x^+). Обозначим координату в карте (U_y^+, φ_y^+) через y, а в карте (U_x^+, φ_x^+) – через x. Как мы видели (только в других обозначениях) отображение перехода $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ будет задаваться функцией

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Рассмотрим в точке p окружности с координатой $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в карте (U_x^+, φ_x^+) касательный вектор ξ с координатой 1 (в этой же карте). Вычислим координаты вектора ξ в карте (U_y^+, φ_y^+). Так как окружность является одномерным многообразием, то в предложении 1.1 индексы i, j принимают только значение 1 и матрица Якоби превращается в число. Вычислим его

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1.$$

Формула из предложения 1.1 имеет в нашем случае всего одно слагаемое: $(-1)1 = -1$. Итак, в локальной карте (U_y^+, φ_y^+) касательный вектор ξ имеет координату -1.

Какую координату в карте (U_y^+, φ_y^+) имеет точка, в которой задается вектор ξ?

Заметим, что в этом примере мы взяли касательный вектор с координатой 1. А вдруг такого вектора не существует? Следующая лемма говорит о том, что для любого набора вещественных чисел (в количестве, равном размерности многообразия) всегда существует касательный вектор с этими числами в качестве координат.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Фиксируем на нем точку p и рассмотрим касательное пространство $T_p(M)$.

Лемма 1.1. *Фиксация локальной карты (U, φ) на многообразии M, содержащей точку p, порождает биекцию $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$. Эту биекцию мы будем называть реперным отображением.*

Доказательство. Построим отображение r_φ, поставив каждому касательному вектору $\xi \in T_p(M)$ набор его координат в карте (U, φ). Инъективность отображения r_φ легко следует из определения координат вектора и определения самого вектора.

Докажем сюръективность. Обозначим координаты точки p в карте (U, φ) через $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Рассмотрим произвольный набор из n вещественных чисел $(\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ и путь $\gamma : I \to M$, имеющий следующее параметрическое задание в данной карте

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \zeta^1 t \\ \ldots \\ x^n = x_0^n + \zeta^n t. \end{cases}$$

Правые части равенств являются гладкими функциями, а значит, задают гладкий путь. Чтобы найти координаты касательного вектора, которому принадлежит этот путь, нужно найти производные по t в нуле от этих функций. Очевидно, что в результате мы получим набор чисел $(\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$, то есть это координаты касательного вектора $[\gamma]$. Итак, отображение r_φ сюръективно, а значит, и биективно. $\square$

Реперное отображение позволяет перенести структуру векторного пространства из арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в касательное пространство $T_p(M)$. А именно, фиксируем карту (U, φ), содержащую точку p и положим

$$\xi + \eta = r_\varphi^{-1}(r_\varphi \xi + r_\varphi \eta); \quad \lambda\xi = r_\varphi^{-1}(\lambda r_\varphi \xi),$$

где $\xi, \eta \in T_p(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Такое определение операций не зависит от выбора карты. Чтобы в этом убедиться, нужно выбрать другую карту (V, ψ), содержащую точку p, и, используя формулу из предложения 1.1 , доказать, что

$$r_\varphi^{-1}(r_\varphi \xi + r_\varphi \eta) = r_\psi^{-1}(r_\psi \xi + r_\psi \eta); \quad r_\varphi^{-1}(\lambda r_\varphi \xi) = r_\psi^{-1}(\lambda r_\psi \xi).$$

Задача 1.8. Проделайте эти выкладки самостоятельно.

Решение. Докажем первое равенство. Второе доказывается аналогично. Обозначим

$$r_\varphi^{-1}(r_\varphi \xi + r_\varphi \eta) = \zeta; \quad r_\psi^{-1}(r_\psi \xi + r_\psi \eta) = \tilde{\zeta}.$$

Нам нужно доказать, что векторы ζ и $\tilde{\zeta}$ совпадают. В силу леммы 1.1 для этого достаточно показать, что в какой-нибудь карте они имеют равные соответствующие координаты. Обозначим координаты всех, участвующих в доказательстве векторов, той же буквой, что и вектор; верхний индекс будет указывать номер координаты, а нижний – карту, относительно которой эта координата задана. Тогда, используя предложение 1.1 , получим

$$\zeta^i_\psi = \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \zeta^i_\varphi = \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (\xi^i_\varphi + \eta^i_\varphi) = \xi^i_\psi + \eta^i_\psi = \tilde{\zeta}^i_\psi.$$

Итак, $\zeta^i_\psi = \tilde{\zeta}^i_\psi$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $\zeta = \tilde{\zeta}$. □

Далее проверяются все 8 аксиом векторного пространства. Очевидно, что нулевым касательным вектором будет прообраз набора из n нулей. Противоположным для касательного вектора ξ будет касательный вектор с противоположными координатами.

Задача 1.9**.** Проверьте все 8 аксиом самостоятельно.

Благодаря такому определению операций в $T_p(M)$ мы, во-первых, получаем структуру векторного пространства в $T_p(M)$, во-вторых, отображение r_φ становится изоморфизмом векторных пространств $T_p(M)$ и $\mathbb{R}^n$ и, в-третьих, мы получаем возможность свести операции с векторами к операциям с их координатами точно так же как это было в аналитической геометрии.

Так как r_φ является изоморфизмом, то размерность пространства $T_p(M)$ равна размерности $\mathbb{R}^n$, то есть $n = dim\, M$. Итак, $dim\, T_p(M) = dim\, M = n$.

5.2. Посмотрим на касательные векторы с другой стороны. Пусть M – n-мерное многообразие. Фиксируем на нем точку $p \in M$ и рассмотрим касательный вектор $\xi \in T_p(M)$. Тогда касательный вектор ξ определяет отображение

$$\xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

задаваемое формулой

$$\xi(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \xi^i, \tag{1.12}$$

где (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, содержащая точку p, а $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ – координаты вектора ξ в этой карте. Это отображение называется *дифференцированием функции в направлении вектора* ξ.

Лемма 1.2**.** *Введенное определение не зависит от выбора карты.*

Доказательство. Рассмотрим еще одну карту (V, ψ) с координатами $(y^1, \ldots, y^n)$, содержащую точку p. Пусть отображение перехода $\psi \circ \varphi^{-1}$ задается функциями $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть касательный вектор ξ определяет отображение $\tilde{\xi} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ относительно карты (V, ψ). Нам нужно доказать, что для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем $\xi(f) = \tilde{\xi}(f)$. Обозначим через $(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ координаты вектора ξ в карте (V, ψ). Тогда используя (1.12), (1.11) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\tilde{\xi}(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}\right|_{\psi(p)} \eta^i = \left.\frac{\partial((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))}{\partial y^i}\right|_{\psi(p)} \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \xi^j =$$

$$= \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k}\right|_{\varphi\circ\psi^{-1}\circ\psi(p)} \left.\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right|_{\psi(p)} \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \xi^j = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \xi^j = \xi(f)$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрицы Якоби $\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)$ и $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ являются взаимно обратными матрицами и их произведение равно дельте Кронеккера δ^k_j. Если понятие кронеккеровской дельты не знакомо и работать с ней не умеете, то посмотрите первые параграфы файла tenz alg.pdf. □

Замечание 1.8**.** Отображение ξ, как и все дифференцирования, удовлетворяет "правилу Лейбница":

$$\xi(fg) = \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g),$$

где $f, g \in C^\infty(M)$.

Действительно, так как взятие частных производных удовлетворяет правилу Лейбница, получим

$$\xi(fg) = \left.\frac{\partial(fg \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \xi^i = \left.\frac{\partial((f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1}))}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \xi^i =$$

$$= \left(\left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \left.\frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right) \xi^i = \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g).$$

Кроме того, отображение ξ обладает стандартным свойством $\mathbb{R}$ линейности, то есть

$$\xi(f+g) = \xi(f) + \xi(g); \quad \xi(\lambda f) = \lambda \xi(f),$$

где $f, g \in C^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отображение $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойству линейности и правилу Лейбница, то есть

$$\delta(fg) = \delta(f)g(p) + f(p)\delta(g)$$

называется *инфинитазимальным дифференцированием* (или, короче, *i-дифференцированием*) алгебры гладких функций многообразия M в точке p.

Таким образом, отображение, порождаемое касательным вектором ξ является инфинитазимальным дифференцированием.

В дальнейшем мы будем отождествлять касательный вектор и инфинитазимальное дифференцирование, которое он порождает, и говорить, что касательный вектор является инфинитазимальным дифференцированием.

Замечание 1.9**.** Можно доказать (см. файл diffs1.ps), что множество всех инфинитазимальных дифференцирований в точке $p \in M$ изоморфно касательному пространству к многообразию M в этой точке.

Итак, касательные векторы, с одной стороны, суть классы эквивалентности соприкасающихся гладких путей, с другой стороны, – прообразы элементов из $\mathbb{R}^n$ при изоморфизме r_φ и, с третьей стороны, – инфинитазимальные дифференцирования.

Пример 1.22**.** Пусть V^n – n-мерное векторное пространство. Согласно примеру 1.15 векторное пространство V^n имеет гладкую структуру, а именно, если в V^n фиксирован базис $(e_1, \ldots, e_n)$, то пара (V^n, φ), где φ ставит в соответствие любому вектору $X \in V^n$ набор его координат $(X^1, \ldots, X^n)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, является глобальной картой на V^n и дополняется до гладкой структуры на V^n. Эту гладкую структуру мы назвали канонической. Она не зависит от выбора базиса в V^n. Таким образом, любое векторное пространство V^n превращается в гладкое многообразие, а значит, для любой его точки X определено касательное пространство $T_X(V^n)$ в этой точке. Покажем, что касательное пространство $T_X(V^n)$ изоморфно векторному пространству V^n.

Фиксируем в V^n базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда для него однозначно определяется дуальный базис $(e^1, \ldots, e^n)$. Он состоит из линейных отображений $e^i : V^n \to \mathbb{R}$, которые каждому вектору $X \in V^n$ ставят в соответствие его i-ю координату X^i в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Покажем, что отображения e^i являются гладкими функциями на гладком многообразии V^n, то есть принадлежат алгебре $C^\infty(V^n)$. Для этого запишем координатное выражение для функции e^i в глобальной карте (V^n, φ) (см. определение гладкого отображения в § 1.4.). Имеем

$$e^i \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

которое задается формулой $e^i \circ \varphi^{-1}(X^1, \ldots, X^n) = X^i$, то есть сначала произвольному набору $(X^1, \ldots, X^n)$ из n вещественных чисел ставится в соответствие вектор $X = X^i e_i \in V^n$, а затем отображение e^i ставит в соответствие этому вектору его i-ю координату в том же базисе. В результате мы получаем отображение, которое набору из n вещественных чисел ставит в соответствие i-е число. Очевидно, что такое отображение является гладким, а значит, являются гладкими и отображения e^i, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь мы можем построить изоморфизм векторных пространств $T_X(V^n)$ и V^n. Зададим отображение

$$\varkappa : T_X(V^n) \to V^n$$

по формуле $\varkappa(\xi) = \xi(e^i)e_i$. Здесь касательный вектор ξ рассматривается как инфинитазимальное дифференцирование алгебры гладких функций (именно для этого мы доказывали гладкость отображений e^i). Очевидно, что отображение задано корректно, то есть мы попадаем в пространство V^n. Покажем, что отображение $\varkappa$ является изоморфизмом векторных пространств. Во-первых, это гомоморфизм, так как

$$\varkappa(\lambda\xi + \mu\eta) = (\lambda\xi + \mu\eta)(e^i)e_i = \lambda\xi(e^i)e_i + \mu\eta(e^i)e_i = \lambda\varkappa(\xi) + \mu\varkappa(\eta)$$

для любых $\xi, \eta \in T_X(V^n)$ и любых вещественных чисел λ и μ.

Во-вторых, покажем, что отображение $\varkappa$ является инъективным, то есть $ker \varkappa = \{0\}$. Пусть $\varkappa(\xi) = 0$. Тогда $\xi(e^i)e_i = 0$. В силу линейной независимости базисных векторов e_i получим $\xi(e^i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Фиксируем номер i и рассмотрим число $\xi(e^i)$. Согласно формуле (1.12) получим

$$\xi(e^i) = \left.\frac{\partial(e^i \circ \varphi^{-1})}{\partial X^j}\right|_{\varphi(X)} \xi^j = \delta^i_j \xi^j = \xi^i.$$

Таким образом, получаем $\xi^i = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $\xi = 0$.

Сюръективность отображения $\varkappa$ следует из того, что размерности векторных пространств $T_X(V^n)$ и V^n равны.

Итак, отображение $\varkappa$ является изоморфизмом векторных пространств.

Докажите самостоятельно, что изоморфизм $\varkappa$ не зависит от выбора базиса, то есть для другого базиса $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ и дуального базиса $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ получим $\xi(\varepsilon^i)\varepsilon_i = \xi(e^i)e_i$.

5.3. Как мы доказали в пункте 5.1. множество касательных векторов в фиксированной точке $p \in M$ является n-мерным векторным пространством, изоморфным арифметическому векторному пространству $\mathbb{R}^n$. Построим в $T_p(M)$ базис.

Рассмотрим изоморфизм $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$ и возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартный базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Вектор ε_i такого базиса представляет из себя набор из n чисел, в котором на i-м месте стоит 1, а остальные нули. Тогда прообраз этого базиса при изоморфизме r_φ будет базисом касательного пространства $T_p(M)$, то есть

$$(e^0_1, \ldots, e^0_n), \text{ где } \quad e^0_i = (r_\varphi)^{-1}(\varepsilon_i)$$

будет базисом в $T_p(M)$. Этот базис называется *натуральным базисом* касательного пространства $T_p(M)$, а совокупность $(p, e^0_1, \ldots, e^0_n)$ называется натуральным репером касательного пространства $T_p(M)$.

Выясним, что представляют из себя векторы натурального базиса, рассматриваемые как инфинитазимальные дифференцирования. Пусть $f \in C^\infty(M)$ – произвольная функция. Тогда, используя формулу (1.12), получим

$$e^0_i(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (e^0_i)^j = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \delta^j_i = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$$

Итак, мы получаем

$$e^0_i(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}), \forall f \in C^\infty(M).$$

Договоримся для краткости обозначать

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p . \tag{1.13}$$

Тогда последнее равенство примет вид

$$e^0_i(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f), \forall f \in C^\infty(M).$$

Итак, касательные вектора натурального базиса, рассматриваемые как инфинитазимальные дифференцирования, являются операторами взятия частных производных по координатам той карты, которая определяет этот базис.

Замечание 1.10. Запишем формулу (1.12) с учетом введенного обозначения (1.13) примет вид

$$\xi(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \xi^i = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f), \forall f \in C^\infty(M),$$

то есть $\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Это означает, что координаты ξ^i вектора ξ суть координаты этого вектора относительно натурального базиса карты (U, φ).

Наконец, найдем гладкие пути, являющиеся представителями векторов натурального базиса (теперь мы рассматриваем эти вектора как классы эквивалентных гладких путей). Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, содержащая точку p. По определению натурального базиса и изоморфизма r_φ получим, что касательный вектор e^0_i имеет координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Эти координаты коротко можно записать с помощью кронеккеровской дельты (δ^j_i), где i – номер вектора e^0_i, то есть фиксированный индекс, а j пробегает значения от 1 до n. Рассмотрим гладкий путь γ, заданный функциями

$$x^j = x^j_0 + \delta^j_i t, \; j = 1, \ldots, n, \tag{1.14}$$

где $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ – координаты точки p в карте (U, φ). Первые производные этих функций в нуле как раз равны кронеккеровской дельте δ^j_i, то есть координаты касательного вектора, которому принадлежит этот путь совпадают с координатами вектора e^0_i. Итак, $e^0_i = [\gamma]$.

Вывод: касательные векторы натурального базиса – это классы эквивалентности путей, соприкасающихся с координатными линиями локальной карты в точке p. Мы видим полную аналогию со случаем двумерной поверхности в классической дифференциальной геометрии.

Задача 1.10. Докажите, что реперное отображение является диффеоморфизмом.

Решение. Пусть на многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ). Тогда в ней определяется реперное отображение $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$, которое каждому касательному вектору из $T_p(M)$ ставит в соответствие набор его координат в локальной карте (U, φ).

Мы уже доказали (см. лемму 1.1), что реперное отображение является биекцией. Покажем, что реперное отображение является гладким. Для этого фиксируем карты в пространстве $T_p(M)$ и $\mathbb{R}^n$. Так как $T_p(M)$ является векторным пространством, его карта определяется с помощью какого-либо базиса этого пространсва (см. пример 1.15). Фиксируем в векторном пространстве $T_p(M)$ натуральный базис (e_i^0). Тогда картирующее отображение φ карты $(T_p(M), \varphi)$ ставит каждому касательному вектору из $T_p(M)$ его координаты в натуральном базисе. Обозначим координаты в карте $(T_p(M), \psi)$ через $(\xi^1, \dots, \xi^n)$. Напомним, что арифметическое векторное пространство также покрывается одной картой $(\mathbb{R}^n, id)$. Обозначим координаты в этой карте через $(x^1, \dots, x^n)$. Так как реперное отображение r_φ каждому касательному вектору ставит в соответствие его координаты в натуральном базисе (или, что эквивалентно, координаты касательного вектора в карте (U, φ)), в паре локальных карт $(T_p(M), \psi)$ и $(\mathbb{R}^n, id)$ реперное отображение будет задаваться формулами $x^i = \xi^i$, $i = 1, \dots, n$. Здесь переменными, по которым нужно дифференцировать, являются буквы ξ^i. Продифференцировать по этим буквам можно любое число раз, следовательно, реперное отображение является гладким.

Отображение, обратное реперному, задается функциями $\xi^i = x^i$. Здесь уже переменными являются буквы x^i. По ним также можно продифференцировать любое число раз. Таким образом, отображение, обратное реперному, также является гладким, а значит, реперное отображение является диффеоморфизмом. $\square$

§1.6. Векторные расслоения. Касательное расслоение.

Если объединить все касательные пространства к гладкому многообразию, то мы получим еще один пример гладкого многобразия. Это многообразие наделено дополнительной структурой, так называемой структурой векторного расслоения. Начнем с общего определения векторного расслоения.

Определение 1.10. Пусть дана тройка $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, состоящая из гладких многообразий $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ и гладкого сюръективного отображения $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$. Она называется *(вещественным) векторным расслоением ранга* n, если

а) для любой точки $b \in \mathscr{B}$ ее полный прообраз

$$\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$$

является (вещественным) векторным пространством;

б) (*условие локальной тривиальности*) существует атлас $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия $\mathscr{B}$ и диффеоморфизмы

$$\chi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1} U_\alpha,$$

что, во-первых, для любой точки $(b, x) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение

$$\chi_\alpha(b, x) \in \mathscr{F}_b,$$

во-вторых, для каждой точки $b \in \mathscr{B}$ отображение

$$\chi_{\alpha,b} : \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_b,$$

определенное формулой

$$\chi_{\alpha,b}(x) = \chi_\alpha(b, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

является изоморфизмом векторных пространств.

Многообразие $\mathscr{B}$ называется *базой* векторного расслоения, многообразие $\mathscr{E}$ называется *тотальным пространством*, а отображение π – *проекцией*. Векторное пространство $\mathscr{F}_b$ называется *слоем* расслоения над точкой $b \in \mathscr{B}$. Диффеоморфизм χ_α называется *тривиализацией* расслоения $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ над открытым множеством U_α, а открытое множество U_α называется *тривиализирующей окрестностью*.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Рассмотрим множество, являющееся объединением всех касательных векторов во всех точках многообразия M

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M) = \bigcup_{p \in M, \xi \in T_p(M)} (p, \xi).$$

Определим отображение $\pi : TM \to M$ по формуле

$$(p, \xi) \to p. \tag{1.15}$$

Очевидно, что оно сюръективно. Тогда тройка (TM, π, M) является претендентом на звание векторного расслоения. Это расслоение называется *касательным расслоением* над M. Проверим выполнение всех требований определения векторного расслоения.

Теорема 1.1. *Тройка (TM, π, M) является векторным расслоением ранга n.*

Доказательство. Обратите внимание, что гладким многообразием пока является только M. Во множестве TM нет пока даже топологии. Начнем мы с пункта а). Из определения (1.15) отображения π следует, что для любой точки $p \in M$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является касательным пространством $T_p(M)$. Как мы знаем (см. § 1.5.) $T_p(M)$ является векторным пространством.

Построим гладкий атлас на множестве TM. Так как M – гладкое многообразие, то на нем есть атлас $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Рассмотрим полные прообразы карт этого атласа при отображении π: $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Элементами множества V_α будут пары (p, ξ) – точка $p \in U_\alpha$ и касательный вектор из касательного пространства $T_p(M)$. Построим отображение $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \times r_{\varphi_\alpha}$, то есть отображение

$$\psi_\alpha : V_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

которое паре (p, ξ) ставит в соответствие сначала координаты точки p в карте (U, φ), а затем координаты вектора ξ в этой же карте. Таким образом, каждому элементу из V_α ставится в соответствие $2n$ вещественных чисел. Теперь у нас есть пары (V_α, ψ_α) – претенденты на локальные карты. Нам нужно, чтобы отображения ψ_α были гомеоморфизмами, а для этого нужна топология в TM. Поэтому мы назовем открытыми в TM полные прообразы всевозможных открытых множеств в $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ при отображении ψ_α. При таком определении топологии отображения ψ_α автоматически становятся непрерывными и открытыми, а значит, гомеоморфизмами. В частности, полный прообраз открытого множества $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ есть множество V_α, то есть оно также является открытым во введенной топологии. Так как, с другой стороны, V_α – полный прообраз при отображении π открытых множеств U_α, то и отображение π будет непрерывным во введенной топологии.

Итак, у нас уже есть топология на TM, причем она, очевидно, хаусдорфова и имеет счетную базу (это действительно так, потому что по сути топология TM есть топология декартова произведения двух топологических пространств U_α и $\mathbb{R}^n$, которые обладают этими свойствами) и построены локальные карты на TM.

Следующая наша задача: доказать, что построенные локальные карты гладко связаны. Рассмотрим две карты на TM: (V, ψ) и $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$. Пусть (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – соответствующие им карты многообразия M. Тогда

$$\tilde{\psi} \circ \psi^{-1} = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \times (r_{\tilde{\varphi}} \circ (r_\varphi)^{-1}).$$

Отображение $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ является диффеоморфизмом, так как карты (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ гладко связаны, а отображение $r_{\tilde{\varphi}} \circ (r_\varphi)^{-1}$ есть пересчет координат вектора из натурального базиса карты (U, φ) в натуральный базис карты $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$. Это линейные функции, а значит, гладкие.

Итак, мы доказали, что TM является гладким многообразием и построили на нем атлас $\{V_\alpha, \psi_\alpha\}$, который называется *атласом, адаптированным расслоению.*

Докажем, что отображение π является гладким. Рассмотрим пару соответствующих карт (V, ψ) с координатами $(y^1, \dots, y^{2n})$ на TM и (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ на M, то есть $V = \pi^{-1}(U)$ и $\psi = \varphi \times r_\varphi$. При таком определении отображения ψ первые n переменных $y^1, \dots, y^n$ суть координаты точки p в карте (U, φ), то есть

$$y^1 = x^1; \quad \dots \quad y^n = x^n.$$

Если мы перепишем эти равенства в виде

$$\begin{aligned} &x^1 = y^1 \\ &\dots \\ &x^n = y^n, \end{aligned}$$

то получим задание отображения π в паре карт (V, ψ), (U, φ). Это линейные функции относительно переменных $y^1, \dots, y^{2n}$ (именно до $2n$; эти переменные мы формально можем ввести в формулы с нулями), а значит, они гладкие. Итак, отображение π является гладким отображением.

Нам осталось проверить свойство локальной тривиальности. Положим

$$\chi_\alpha = id \times r_{\varphi_\alpha}^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to V_\alpha.$$

Это отображение берет набор из точки многообразия M и системы n вещественных чисел и ставит им в соответствие пару из точки p и касательного вектора в точке p с координатами в натуральном базисе карты (U, φ), равными данным числам. Это элемент из множества $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Это биекция, так как тождественное преобразование и отображение r_{φ_α} являются биекциями. Кроме того, отображения id и r_{φ_α} – диффеоморфизмы, а значит, их декартово произведение также является диффеоморфизмом. Наконец, заметим, что, фиксировав точку $p \in U_\alpha$, мы получим отображение $\chi_{\alpha p} : \mathbb{R}^n \to T_p(M)$, которое будет совпадать с отображением $r_{\varphi_\alpha}^{-1}$, то есть будет изоморфизмом векторных пространств по доказанному выше.

Итак, все условия определения векторного расслоения выполнены, следовательно, касательное расслоение является векторным расслоением. Его слоями являются касательные пространства в точках многообразия M. $\square$

Пример 1.23. Рассмотрим касательное расслоение к окружности S^1. Тотальное пространство TS^1 диффеоморфно двумерному цилиндру. Мы не будем доказывать этот факт строго, а ограничимся только некоторыми образными соображениями. Касательные пространства к окружности мы можем представить себе в виде касательных к ней, то есть в виде прямых. "Повернем"эти прямые так, чтобы они были перпендикулярны плоскости окружности. В результате получим двумерный круговой цилиндр. Если на окружности фиксировать атлас $\mathfrak{A}_1$ из примера 1.17, то картами адаптированного атласа цилиндра будут два "листа охватывающих цилиндр и состыкующихся по прямолинейным образующим, проходящим через точки N и S окружности.

§1.7. Гладкие сечения векторных расслоений.

Пусть $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ – векторное расслоение. Гладкое отображение

$$s:\mathscr{B}\to\mathscr{E} \tag{1.16}$$

удовлетворяющее соотношению

$$\pi\circ s=id$$

называется *гладким сечением* расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$.

Замечание 1.11. Гладкое отображение (1.16) является сечением тогда и только тогда, когда $s(b)\in\mathscr{F}_b$ для любой точки $b\in\mathscr{B}$, то есть когда оно выбирает в каждом слое $\mathscr{F}_b$ элемент $s(b)$.

Предложение 1.2 . *Множество всех гладких сечений векторного расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ образует вещественное векторное пространство.*

Доказательство. Определим операции сложения сечений и умножение сечения на вещественное число следующим образом:

$$(s_1+s_2)(b)=s_1(b)+s_2(b);\quad (\lambda s)(b)=\lambda s(b),\quad b\in\mathscr{B},$$

где s,s_1,s_2 – гладкие сечения, $\lambda\in\mathbb{R}$. Очевидно, что отображения s_1+s_2 и λs являются гладкими как сумма и произведение таковых. Докажем, что они удовлетворяют условиям $\pi\circ(s_1+s_2)=id$ и $\pi\circ(\lambda s)=id$, то есть являются гладкими сечениями. Проверим второе условие (первое проверяется еще проще). Имеем

$$\pi\circ(\lambda s)(b)=\pi(\lambda s(b)).$$

Согласно замечанию 1.11 элемент $s(b)$ принадлежит слою $\mathscr{F}_b$, который является векторным пространством. Тогда $\lambda s(b)$ – элемент того же векторного пространства $\mathscr{F}_b$, то есть слоя над точкой b. По определению проекции π образом этого элемента будет точка, над которой висит этот слой, то есть точка b. Итак, $\pi\circ(\lambda s)(b)=b$ для любой $b\in\mathscr{B}$, то есть $\pi\circ(\lambda s)=id$.

Отметим, что нулевым сечением является отображение $0:\mathscr{B}\to\mathscr{E}$, которое каждой точке $b\in\mathscr{B}$ ставит в соответствие нулевой элемент соответствующего слоя $\mathscr{F}_b$ (мы помним, что в векторном расслоении слои являются векторными пространствами).

Далее проверяются все 8 аксиом векторного пространства. Подробные выкладки мы оставляем читателю. □

Замечание 1.12. Отметим, что в общем случае векторное пространство сечений векторного расслоения не является конечномерным.

Для любой гладкой функции $f\in C^\infty(\mathscr{B})$ на многообразии $\mathscr{B}$ и любого сечения s определим отображение $fs:\mathscr{B}\to\mathscr{E}$ по формуле

$$(fs)(b)=f(b)s(b),\quad b\in\mathscr{B}.$$

Проверьте самостоятельно, что отображение fs будет гладким сечением расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$. Все 8 аксиом из определения векторного пространства, где вещественные числа заменены на гладкие функции многообразия $\mathscr{B}$, выполняются (единицей будет функция, которая любой точке $\mathscr{B}$ ставит в соответствие число 1). Это означает (по определению), что множество гладких сечений расслоения является *унитарным $C^\infty(\mathscr{B})$-модулем.*

Пусть (U,φ) – локальная карта на многообразии $\mathscr{B}$, которую без ограничения общности можно считать тривиализирующей окрестностью. Тогда множество $\pi^{-1}U$ диффеоморфно декартову произведению $U\times\mathbb{R}^n$, а значит, является открытым подмногообразием в $\mathscr{E}$. Нетрудно видеть, что тройка $(\pi^{-1}U,\pi|_U,U)$ будет векторным расслоением, которое мы будем называть *частью* векторного расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$.

Для любого гладкого сечения $s:\mathscr{B}\to\mathscr{E}$ определим отображение

$$s_U:U\to\pi^{-1}U$$

по формуле $s_U(p) = s(p)$, $p \in U$. Отображение s_U будет гладким по определению гладкого отображения, а значит, оно является гладким сечением расслоения $(\pi^{-1}U, \pi|_U, U)$. Будем называть сечение s_U *сужением* сечения s на область локальной карты U. В отличие от $C^\infty(\mathscr{B})$-модуля гладких сечений всего векторного расслоения $C^\infty(U)$-модуль части векторного расслоения обладает конечным числом образующих, а именно, верна

Теорема 1.2. *Пусть $(\pi^{-1}U, \pi|_U, U)$ – часть векторного расслоения $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ над тривиализирующей окрестностью U, где под $\pi|_U$ мы понимаем сужение проекции π на открытое подмногообразие $\pi^{-1}U$. Тогда существуют n линейно независимых сечений (коэффициентами будут гладкие функции на U)*

$$s_1, \ldots, s_n$$

расслоения $(\pi^{-1}U, \pi|_U, U)$, такие что любое сечение s расслоения $(\pi^{-1}U, \pi|_U, U)$ представимо в виде

$$s = s^1 s_1 + \ldots + s^n s_n,$$

где n – ранг расслоения $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, $s^1, \ldots, s^n$ – гладкие функции на многообразии U.

Доказательство. Пусть $\chi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}U$ – тривиализация (см. определение векторного расслоения § 1.6.). Положим по определению

$$s_i(b) = \chi(b, \varepsilon_i), \quad b \in U,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.17}$$

где $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – стандартный базис арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Так как χ – диффеоморфизм, отображения $s_i : U \to \pi^{-1}U$ являются гладкими. По определению векторного расслоения имеем $\chi(b, \varepsilon_i) \in \mathscr{F}_b$. Тогда

$$\pi|_U \circ s_i(b) = \pi(\chi(b, \varepsilon_i)) = b,$$

то есть $\pi|_U \circ s_i = id$, а значит, s_i – гладкие сечения $(\pi^{-1}U, \pi|_U, U)$.

Докажем, что построенная система сечений $(s_1, \ldots, s_n)$ является линейно независимой (из этого факта легко следует единственность разложения любого сечения по данной системе сечений). Рассмотрим линейную комбинацию данных сечений с коэффициентами $s^i \in C^\infty(U)$:

$$s^1(b)s_1(b) + \ldots + s^n(b)s_n(b) = 0.$$

Это равенство верно для любой точки $b \in U$. Фиксируем эту точку и воспользуемся формулой (1.17)

$$s^1(b)\chi(b, \varepsilon_1) + \ldots + s^n(b)\chi(b, \varepsilon_n) = 0.$$

При фиксированной точке b получим, что $s^i(b)$ являются вещественными числами, а отображения $\chi(b, \varepsilon_i)$ – изоморфизмами векторных пространств (по определению векторного расслоения). Тогда

$$\chi(b, s^i(b)\varepsilon_i) = 0.$$

Так как отображение χ является изоморфизмом векторных пространств, то $s^i(b)\varepsilon_i = 0$ или $(s^1(b), s^2(b), \ldots, s^n(b)) = 0$. Откуда получаем, что $s^i(b) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Это равенство верно для любой точки b. Отпустим теперь эту точку. Тогда получим, что функции s^i тождественно равны нулю. Таким образом, система сечений $(s_1, \ldots, s_n)$ является линейно независимой.

Рассмотрим произвольное сечение $s : U \to \pi^{-1}U$. Фиксируем произвольную точку $b \in U$. Как мы видели выше из определения сечения следует, что значение $s(b)$ в точке b принадлежит слою $\mathscr{F}_b$, висящему над этой точкой. Слой $\mathscr{F}_b$ содержится в многообразии $\pi^{-1}U$, которое диффеоморфно декартову произведению $U \times \mathbb{R}^n$. Так как диффеоморфизм χ, в частности, является биекцией, то существует элемент $(q, x) \in U \times \mathbb{R}^n$, такой что $s(b) = \chi(q, x)$. Но согласно определению векторного расслоения элемент $\chi(q, x)$ должен принадлежать слою $\mathscr{F}_q$. Откуда получаем, что $b = q$ и, следовательно, существует элемент $x(b) \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$s(b) = \chi(b, x(b)).$$

Разложим $x(b)$ по стандартному базису пространства $\mathbb{R}^n$: $x(b) = s^i(b)\varepsilon_i$. Так как по определению векторного расслоения при фиксации точки b отображение χ становится изоморфизмом векторных пространств, имеем

$$s(b) = \chi(b, x(b)) = \chi(b, s^i(b)\varepsilon_i) = s^i(b)\chi(b, \varepsilon_i) = s^i(b)s_i.$$

Если мы отпустим точку b, то $s^i(b)$ будут функциями на U. Нам осталось доказать, что эти функции гладкие. Имеем $(b, s^i(b)\varepsilon_i) = \chi^{-1} \circ s(b)$. Тогда

$$s^i(b) = x^i \circ pr_2 \circ \chi^{-1} \circ s(b), \tag{1.18}$$

где $pr_2 : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – проекция на второй сомножитель, x^i – функция, ставящая набору из n чисел его i-й элемент. Все функции, фигурирующие в соотношении (1.18), являются гладкими функциями, а значит, гладкой функцией является и их композиция. Тем самым наше утверждение доказано полностью. □

§1.8. Векторные поля на гладком многообразии.

Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Гладкие сечения касательного расслоения (TM, π, M) называются *(гладкими) векторными полями* на многообразии M. Как мы видели они образую $C^\infty(M)$-модуль. Обозначим его через $\mathfrak{X}(M)$. Напомним, что векторное поле – это гладкое отображение $X : M \to TM$, которое каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие пару (p, ξ), где ξ – некоторый касательный вектор в этой точке. Будем обозначать касательный вектор, который ставит в соответствие точке p векторное поле X, через X_p. Запишем функции, задающие гладкое отображение X в паре соответствующих карт (см. теорему 1.1) (U, φ) на M с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и (V, ψ) на TM с координатами $(y^1, \dots, y^{2n})$. Напомним, что первые n координат точки $(p, \xi) \in TM$ – это координаты точки p, а остальные n координат – это координаты вектора ξ в натуральном базисе карты (U, φ). Тогда

$$X : \begin{cases} y^1 = x^1 \\ \dots \\ y^n = x^n \\ y^{n+1} = \xi^1(x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ y^{2n} = \xi^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

Первые n функций гладки тривиальным образом. Гладкость оставшихся n функций означает, что координаты касательного вектора являются гладкими функциями координат точки.

Векторное поле X определяет отображение $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (мы будем обозначать его той же буквой) по формуле

$$(Xf)(p) = X_p(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p (X_p)^i, \tag{1.19}$$

где $(X_p)^i$ – координаты касательного вектора X_p в натуральном базисе.

Внимательно посмотрим на эти два равенства. Первое из них инвариантно (не зависимо от выбора локальной карты) задает функцию Xf, но не гарантирует ее гладкость. Второе равенство зависит от выбора локальной карты, но показывается гладкость функции Xf как линейной комбинации гладких функций. Поэтому из второго равенства мы берем гладкость, а из первого независимость от выбора локальной карты. Таким образом, мы получаем корректное определение отображения X.

Предложение 1.3 **.** *Отображение $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ является $\mathbb{R}$-линейным и удовлетворяет правилу Лейбница, то есть*

$$\begin{array}{ll} 1)\; X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g), & \alpha, \beta \in \mathbb{R}; f, g \in C^\infty(M); \\ 2)\; X(fg) = X(f)g + fX(g), & f, g \in C^\infty(M). \end{array}$$

Такие отображения называются дифференцированиями алгебры гладких функций. Другими словами, любое векторное поле может быть рассмотрено как дифференцирование алгебры гладких функций.

Доказательство. Мы проверим второе свойство. Первое проверяется аналогично. Имеем

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) = (Xf)(p)g(p) + f(p)(Xg)(p) = ((Xf)g + f(Xg))(p),\ \forall p \in M.$$

Здесь мы воспользовались тем, что касательный вектор можно рассматривать как инфинитазимальное дифференцирование, а для него правило Лейбница имеет место. □

Замечание 1.13**.** Можно доказать, что любое дифференцирование алгебры гладких функций $C^\infty(M)$ можно отождествить с некоторым векторным полем на многообразии M.

Итак, аналогично случаю касательных векторов, мы получили, что векторные поля на многообразии M, с одной стороны, являются гладкими сечениями касательного расслоения, а, с другой стороны, – дифференцированиями алгебры гладких функций.

Замечание 1.14**.** Для векторных полей, которые рассматриваются как дифференцирования алгебры гладких функций также вводятся операции сложения, умножения на вещественное число и умножение на гладкую функцию:

$$(X + Y)(g) = X(g) + Y(g); \quad (\lambda X)(g) = \lambda X(g); \quad (fX)(g) = fX(g),$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – векторные поля как дифференцирования алгебры гладких функций, $\lambda \in \mathbb{R}$ – произвольное вещественное число, f, g – гладкие функции на M. Эти определения операций согласованы с определениями соответствующих операций для тензорных полей, рассматриваемых как гладкие сечения касательного расслоения. Действительно для любой точки $p \in M$ имеем,

$$\begin{aligned} (X + Y)(g)(p) &= ((X + Y)|_p)(g) = ((X + Y)(p))(g) = (X(p) + Y(p))(g) = (X(p))(g) + (Y(p))(g) = \\ &= X_p(g) + Y_p(g) = X(g)(p) + Y(g)(p) = (X(g) + Y(g))(p). \end{aligned}$$

В крайне левой части цепочки равенств векторные поля X и Y выступают как дифференцирования алгебры гладких функций, далее $(X+Y)|_p$ – это касательный вектор, который ставит в соответствие векторное поле $X+Y$, рассматриваемое как гладкое сечение касательного расслоения, далее $(X+Y)(p)$ – это значение векторного поля $X+Y$ как гладкого сечения в точке p, далее используем определение операции сложения векторных полей как гладких сечений, и, наконец, проделываем все операции в обратном порядке.

Рассмотрим локальную карту (U, φ) на многообразии M, где U является тривиализирующей окрестностью. Тогда определено векторное поле X_U, которое называется сужением векторного поля X на U. Этот факт называется *первым принципом локализации*. С другой стороны, на многообразии U есть свой $C^\infty(U)$-модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(U)$. Первый принцип локализации говорит, что все сужения векторных полей многообразия M на область карты U принадлежат модулю $\mathfrak{X}(U)$. Обратное, вообще говоря, не верно, то есть не любое векторное поле из $\mathfrak{X}(U)$ мы можем рассматривать как сужение некоторого векторного поля из $\mathfrak{X}(M)$. Но для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(U)$ существует векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$ и существует открытое множество $V \subset U$, такое что

$$X|_V = Y|_V,$$

другими словами, если "уменьшить"область карты, то сужения векторных полей на этом уменьшенном множестве совпадут. Этот факт называется *вторым принципом локализации*. Доказательство можно посмотреть в монографии С. Хелгасона "Дифференциальная геометрия и симметрические пространства 1964 или в файле diffs1.ps.

Благодаря обоим принципам локализации мы можем свести изучение векторных полей, заданных на всем многообразии, к изучению их сужений, заданных на областях карт, и возвращать результаты исследования обратно на все многообразие.

Как мы видели в общей теории векторных расслоений, модуль $\mathfrak{X}(U)$ обладает конечным числом образующих (проще говоря, базисом). Выясним, чем являются сечения $s_1, \dots, s_n$ в данном случае.

Напомним, что $s_i(p) = \chi(p, \varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, n$. Так как для касательного расслоения $\chi = id \times r_\varphi^{-1}$, то

$$s_i(p) = id \times r_\varphi^{-1}(p, \varepsilon_i) = (p, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p).$$

Будем обозначать векторные поля s_i через $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Итак, векторные поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{1.20}$$

образуют базис модуля $\mathfrak{X}(U)$. Она называется *натуральным базисом* $\mathfrak{X}(U)$. Это название объясняется тем, что второй элемент значения векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в точке p совпадают с соответствующим касательным вектором натурального базиса. Натуральный базис (1.20) называют также *локальным базисом* модуля $\mathfrak{X}(M)$. Объясним теперь это название.

Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле, рассматриваемое как сечение касательного расслоения (TM, π, M). Для него определено сужение $X|_U$, которое в каждой фиксированной точке $p \in U$ представимо в виде

$$X|_U(p) = (p, X_p) = (p, (X_p)^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p) = (X_p)^i (p, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

Здесь мы просто переобозначили $(X_p)^i$ на $X^i(p)$. И то и другое суть координаты касательного вектора. Но если в первом случае точка p у нас фиксирована, то во втором случае мы ее отпустили. В результате мы можем векторное поле $X|_U$ представить в виде

$$X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то есть сужение векторного поля X представимо в виде линейной комбинации векторных полей натурального базиса. Часто пишут (и мы будем также писать)

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

подразумевая, что в левой части этого равенства стоит не само векторное поле X, а его сужение на область локальной карты.

В силу общей теории векторных расслоений, рассмотренной выше, функции X^i – это гладкие функции на многообразии U. Они называются *локальными координатами векторного поля X в натуральном базисе*.

Пусть на многообразии M фиксированы две пересекающиеся карты (U,φ) с координатами $(x^1,\dots,x^n)$ и (V,ψ) с координатами $(y^1,\dots,y^n)$. Получим формулы связывающие векторные поля натуральных базисов этих карт. Фиксируем произвольную точку $p\in U\cap V$. Воспользуемся определением векторного поля как гладкого сечения и формулой (1.11):

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(p)=\left(p,\,\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p\right)=\left(p,\,\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\bigg|_p\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right)=\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\left(p,\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right)=\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$$

Итак, мы получаем формулу для векторных полей натуральных базисов

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.21}$$

Замечание 1.15. Итак, мы видели, что для любого векторного поля X его значение $X(p)\equiv X_p$ в любой точке $p\in M$ есть касательный вектор из касательного пространства $T_p(M)$. Оказывается верно следующее утверждение:

Теорема 1.3. *Пусть $\xi\in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Тогда существует векторное поле $X\in\mathfrak{X}(M)$, такое что*

$$\xi=X_p.$$

Другими словами, каждый касательный вектор является значением некоторого векторного поля многообразия M в данной точке.

Доказательство. Фиксируем локальную карту (U,φ), содержащую точку p. Обозначим координаты касательного вектора ξ в натуральном базисе этой карты через $(\xi^1,\dots,\xi^i)$. Это вещественные числа, то есть постоянные функции на многообразии U, следовательно гладкие функции. Тогда мы можем построить гладкое векторное поле $X_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\mathfrak{X}(U)$. Его значение в точке p как раз совпадет с вектором ξ. По второму принципу локализации существует окрестность $V\subset U$ точки p и векторное поле $X\in\mathfrak{X}(M)$, такие что $X|_V=(X_U)|_V$. В частности, $X(p)=X_U(p)=\xi$. □

Эта теорема понадобится нам во второй главе.

Пример 1.24. Рассмотрим гладкое многообразие $\mathbb{R}^2$. Чтобы было легче представлять его себе, посмотрим на него как на обычную плоскость σ, в которой фиксирована прямоугольная декартова система координат. Напомним (см. пример 1.11), что это двумерное гладкое многообразие, атлас которого состоит из единственной карты $(\mathbb{R}^2,id)$. Координаты (x^1,x^2) этой карты суть координаты точки плоскости в выбранной декартовой системе координат. Так как у нас всего две координаты, обозначим их более привычным образом (x,y).

Фиксируем произвольную точку $p=(x_0,y_0)$ на $\mathbb{R}^2$. Как мы знаем (см. лемму 1.1 и далее), касательное пространство $T_p(\mathbb{R}^2)$ изоморфно $\mathbb{R}^2$, а значит, может быть с ним отождествлено. В свою очередь $\mathbb{R}^2$ мы можем отождествить с двумерным векторным пространством "обычных"векторов, параллельных плоскости σ следующим образом: каждой паре вещественных чисел из $\mathbb{R}^2$ поставим в соответствие вектор с такими же координатами относительно базиса введенной системы координат. Таким образом, касательные векторы в точке (x_0,y_0) отождествляются с "обычными"векторами, параллельными плоскости σ. При этом координаты касательного вектора в карте $(\mathbb{R}^2,id)$ суть координаты "обычного"вектора, с которым отождествляется касательный вектор, относительно базиса фиксированной прямоугольной декартовой системы координат. Если хотите, можете представлять касательные векторы в точке (x_0,y_0) как направленные отрезки, отложенные от этой точки. В частности, вектора натурального базиса (e_1^0,e_2^0) в точке (x_0,y_0) суть "обычные"вектора, имеющие в базисе прямоугольной декартовой системы координат координаты $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Следовательно, это вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Опять для наглядности мы можем представлять их отложенными от точки (x_0,y_0).

Рассмотрим теперь модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Начнем с натурального базиса. Так как карта у многообразия $\mathbb{R}^2$ одна, то натуральный базис определен глобально. В каждой точке (x_0,y_0) значения векторных полей $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$ – это векторы натурального базиса касательного пространства, то есть в любой точке (x_0,y_0) – это векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Итак, векторные поля натурального базиса – это векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ фиксированной прямоугольной декартовой системы координат.

Рассмотрим векторное поле (очевидно гладкое, так как координаты $X^1(x,y)=x$ и $X^2(x,y)=y$ – гладкие функции)

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Используя введенные отождествления, нарисуйте полученное векторное поле.

Обратите внимание, что в этом примере мы получили модуль гладких векторных полей конечномерным (а точнее двумерным). Для него это объясняется тем, что многообразие можно покрыть единственной картой. Кроме того, мы получили, что касательное пространство в каждой точке изоморфно модулю гладких векторных полей (и самому гладкому многообразию). Этот факт имеет место не только для $\mathbb{R}^2$, но и для любого гладкого многообразия, являющегося конечномерным векторным пространством. Постарайтесь доказать это самостоятельно. $\square$

Пример 1.25**.** Посмотрим другой пример гладкого многообразия, у которого есть глобальный базис в модуле гладких векторных полей, хотя оно не может быть покрыто одной картой. Обратите внимание, что следующие рассуждения не являются строгими, а носят интуитивно− иллюстративный характер.

Рассмотрим окружность S^1. В каждой ее точке касательное пространство может быть отождествлено с $\mathbb{R}^1$, то есть мы можем представить себе касательное пространство как множество всех "обычных"векторов, параллельных касательной к окружности в этой точке. Гладкое векторное поле на окружности – это множество касательных векторов, "закрученных в одну сторону"у которых длина является гладкой функцией точки окружности. Тогда, взяв векторное поле X с единичной длиной векторов, мы можем любое другое векторное поле Y на окружности получить из X, умножая X на гладкую функцию длины Y. Таким образом, мы получаем глобальный базис модуля гладких векторных полей на окружности.

Уже на двумерной сфере ситуация меняется в корне. Глобального базиса там нет. Это следует из того, что любое векторное поле на сфере имеет точку, в которой оно обращается в нуль.

§1.9. Коммутатор векторных полей.

Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля на гладком многообразии M, рассматриваемые как дифференцирования алгебры гладких функций. Рассмотрим композицию

$$X \circ Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M).$$

Это $\mathbb{R}$-линейное отображение, но правило Лейбница не выполняется. Действительно,

$$\begin{aligned} X \circ Y(fg) = X(Y(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) = X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) = \\ = (X \circ Y(f))g + f((X \circ Y)(g)) + Y(f)X(g) + X(f)Y(g),\ f, g \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Видно, что первые два слагаемых как раз нужное нам правило Лейбница, но есть еще два слагаемых, которые мешаются. Попробуем исправить ситуацию, вычислив

$$Y \circ X(fg) = (Y \circ X(f))g + f((Y \circ X)(g)) + X(f)Y(g) + Y(f)X(g). \tag{1.22}$$

Вычитая из формулы (**??**) формулу (1.22), получим

$$(X \circ Y - Y \circ X)(fg) = (X \circ Y - Y \circ X)(f)g + f(X \circ Y - Y \circ X)(g).$$

Это означает, что $\mathbb{R}$-линейное отображение $X \circ Y - Y \circ X$ удовлетворяет правилу Лейбница, а значит, является векторным полем (см. замечание 1.13). Оно обозначается $[X, Y]$ и называется *коммутатором векторных полей* или *скобкой Ли*.

Итак, по определению

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Задача 1.11**.** Докажите, что для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ имеют место тождества

$$\begin{array}{ll} 1)\ [X, Y] = -[Y, X] & \text{антикоммутативность;} \\ 2)\ [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 & \text{тождество Якоби.} \end{array}$$

Указание: примените определение скобки Ли.

Пример 1.26**.** Докажем еще два свойства скобки Ли. Во-первых, скобка Ли обладает свойством аддитивности по каждому аргументу, то есть

$$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]; \quad [X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z].$$

Во-вторых, скобка Ли обладает свойством $\mathbb{R}$-однородности, то есть вещественные числа можно выносить за знак скобки Ли,

$$[\lambda X, Y] = [X, \lambda Y] = \lambda[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \lambda \in \mathbb{R},$$

но не обладает свойством $C^\infty(M)$-однородности. Вместо этого свойства имеют место равенства

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X; \quad [X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y. \tag{1.23}$$

Действительно, для произвольных гладких функций $f,g\in C^\infty(M)$ и произвольных векторных полей $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ имеем

$$[fX,Y](g)=(fX)\circ Y(g)-Y\circ(fX)(g)=f(X(Y(g))-Y(fX(g))=f(X(Y(g))-Y(f)X(g)-fY(X(g))= \\ =f[X,Y](g)-Y(f)X(g)=(f[X,Y]-Y(f)X)(g).$$

Здесь мы воспользовались правилом Лейбница. Так как полученное равенство справедливо для любой функции g, то мы доказали первое равенство из (1.23). Второе равенство доказывается аналогично.

Свойства аддитивности и $\mathbb{R}$-однородности доказываются аналогичным образом. Проведите рассуждения самостоятельно.

Пример 1.27**.** Найдем касательный вектор $[X,Y]_p$, который векторное поле $[X,Y]$ ставит в соответствие произвольной точке $p\in M$.

По определению векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. (1.19) имеем для любой гладкой функции $f\in C^\infty(M)$

$$[X,Y]_p(f)=([X,Y](f))(p)=(X(Y(f))-Y(X(f)))(p)=X_p(Y(f))-Y_p(X(f))=(X_p\circ Y-Y_p\circ X)(f).$$

Итак, мы получаем, что

$$[X,Y]_p=X_p\circ Y-Y_p\circ X.$$

Обратите внимание, что здесь векторные поля рассматриваются как дифференцирования алгебры гладких функций, а касательные векторы – как инфинитазимальные дифференцирования.

Пусть на многообразии M фиксирована локальная карта (U,φ) с координатами $(x^1,\dots,x^n)$. Найдем координаты векторного поля $[X,Y]$ в натуральном базисе этой карты. Используя определение скобки Ли, (1.19) и правило Лейбница, получим

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))=X\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}Y^i\right)-Y\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}X^i\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}X^jY^i+\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}X^iY^j-\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j$$

Рассмотрим слагаемые $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}X^jY^i-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}X^iY^j$. Во втором слагаемом индекс суммирования i обозначим через j, а индекс суммирования j – через i. Так как функция f гладкая, в частности, непрерывная, то порядок взятия производной не важен, а значит, рассмотренные слагаемые взаимно уничтожаются. Оставшиеся два слагаемых запишем в следующем виде

$$[X,Y](f)=\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i}(f),\ \forall f\in C^\infty(M).$$

Итак, мы получаем формулу для вычисления скобки Ли векторных полей в локальной карте:

$$[X,Y]=\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.24}$$

Пример 1.28**.** Вычислим по формуле (1.24) коммутатор векторных полей из натурального базиса. Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^\ell}\right]=\left(\frac{\partial\delta^i_\ell}{\partial x^j}\delta^j_k-\frac{\partial\delta^i_k}{\partial x^j}\delta^j_\ell\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=0.$$

Итак, коммутатор векторных полей натурального базиса равен нулю. В частности, векторные поля натурального базиса коммутируют, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\circ\frac{\partial}{\partial x^\ell}=\frac{\partial}{\partial x^\ell}\circ\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Это и не удивительно, так как мы знаем из математического анализа, что взятие частных производных непрерывной, в частности, гладкой функции не зависит от порядка, в котором эти частные производные берутся.

§1.10. Кокасательное расслоение. Дифференциальные 1-формы.

Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Для него мы уже определили касательные векторы, которые в каждой точке многообразия M образуют векторные пространства размерности n, построили касательное расслоение (TM,π,M) и его сечения назвали векторными полями на многообразии M. Другими словами, векторное поле – это совокупность касательных векторов, координаты которых в натуральном базисе касательных пространств гладким образом меняются при переходе от точки к точке, то есть являются гладкими функциями.

Как мы знаем из курса тензорной алгебры, для любого векторного пространства, в частности, для касательного пространства $T_p(M)$ определено двойственное пространства, состоящее из $\mathbb{R}$-линейных отображений вида $u : T_p(M) \to \mathbb{R}$. Эти отображения называются ковекторами. Множество всех ковекторов, определенных на векторном пространстве $T_p(M)$ обладает структурой n-мерного векторного пространства и обозначается $T_p^*(M)$.

Мы начнем изучение пространств ковекторов с построения базиса пространства $T_p^*(M)$, двойственного натуральному базису касательного пространства $T_p(M)$. Фиксируем на M локальную карту (U, φ). Тогда в каждой точке $p \in U$ определяется изоморфизм (см. § 1.5.)

$$r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n,$$

ставящий каждому касательному вектору его координаты в карте (U, φ) или, что эквивалентно, координаты в натуральном базисе пространства $T_p(M)$. Рассмотрим отображения

$$x^i \circ r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функции, ставящие в соответствие набору из n чисел его i-е число. Очевидно, что функции x^i $\mathbb{R}$-линейны, кроме того, мы доказали, что $\mathbb{R}$-линейно отображение r_φ. Тогда отображения $x^i \circ r_\varphi$ будут линейны, то есть будут ковекторами, определенными на векторном пространстве $T_p(M)$. Будем обозначать их $x^i \circ r_\varphi = (dx^i)_p$. Итак, для каждой точки $p \in U$ из области локальной карты мы построили совокупность ковекторов

$$(dx^i)_p : T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти ковекторы претендуют на звание дуального базиса, то есть базиса векторного пространства $T_p^*(M)$. Напомним (см. файл tenz alg.pdf), что система ковекторов $(e^1, \ldots, e^n)$ является дуальным базисом для базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ векторного пространства V тогда и только тогда, когда

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

где δ^i_j – дельта Кронеккера. Для нашего случая имеем

$$(dx^i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right)^i = \delta^i_j. \tag{1.25}$$

Итак, мы показали, что система ковекторов $((dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p)$ является дуальным базисом для натурального базиса касательного пространства. Будем называть его *натуральным кобазисом.*

Теперь у нас все готово, чтобы построить кокасательное расслоение по аналогии с касательным расслоением. Обозначим через T^*M множество всех ковекторов из всех пространств $T_p^*(M)$, $p \in M$, то есть

$$T^*M = \bigcup_{p \in M, u \in T_p^*(M)} (p, u).$$

Рассмотрим тройку (T^*M, π, M), где отображение

$$\pi : T^*M \to M$$

задается формулой

$$\pi((p, u)) = p.$$

Оказывается, что тройка (T^*M, π, M) является векторным расслоением. Оно называется *кокасательным расслоением.* Слоями этого расслоения являются кокасательные пространства $T_p^*(M)$.

Мы не будем проводить подробное доказательство того, что (T^*M, π, M) – векторное расслоение (оно аналогично случаю касательного расслоения), а лишь скажем как строятся локальные карты на $2n$-мерном многообразии T^*M. Так как M является гладким многообразием, на нем есть атлас $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$. Полные прообразы $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ будут областями карт на T^*M. Картирующие отображения $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ будут ставить в соответствие каждой точке $(p, u) \in V_\alpha$ набор из $2n$ чисел, в котором первые n чисел суть координаты точки p в локальной карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, а остальные n чисел – координаты ковектора u в натуральном кобазисе этой карты.

Рассмотрим гладкие сечения $\omega : M \to T^*M$ кокасательного расслоения. Они называются *дифференциальными 1-формами* или просто *1-формами.*

В паре соответствующих карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и (V_α, ψ_α) с координатами $(y^1, \ldots, y^{2n})$ гладкое сечение ω задается следующими гладкими функциями:

$$s : \begin{cases} y^1 = x^1 \\ \ldots \\ y^n = x^n \\ y^{n+1} = u_1(x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots \\ y^{2n} = u_n(x^1, \ldots, x^n). \end{cases}$$

Заметим, что первые n функций гладки тривиальным образом.

Множество 1-форм образует $C^\infty(M)$-модуль (это следует из общей теории гладких сечений векторных расслоений § 1.7.) и обозначается $\mathfrak{X}^*(M)$. Будем обозначать ковектор, который ставит 1-форма ω в соответствие точке p, через ω_p, то есть

$$\omega(p) = (p, \omega_p).$$

Фиксируем локальную карту (U, φ) на M. Тогда $C^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{X}^*(U)$ имеет конечное число образующих, то есть базис. Аналогично случаю векторных полей доказывается, что совокупность 1-форм

$$(dx^1, \ldots, dx^n), \tag{1.26}$$

где $dx^i(p) = (p, (dx^i)_p)$ образует базис модуля $\mathfrak{X}^*(U)$.

Из (1.25) следует, что базис 1-форм $(dx^1, \ldots, dx^n)$ является дуальным натуральному базису $\mathfrak{X}(U)$. Он называется *дуальным натуральным базисом.*

Для любой формы $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ имеет место разложение

$$\omega|_U = \omega_i dx^i$$

где $\omega|_U$ – сужение формы ω на область карты, $\omega_i(p)$ – координаты ковектора ω_p. Они являются гладкими функциями на U. Как и в случае векторных полей принято писать

$$\omega = \omega_i dx^i,$$

подразумевая, что в левой части этого равенства стоит не сама 1-форма ω, а ее сужение на координатную окрестность. Базис (1.26) называется *локальным базисом модуля* $\mathfrak{X}^*(M)$, а функции ω_i, $i = 1, \ldots, n$ называются *локальными координатами* 1-формы ω в базисе (1.26) или локальной карте (U, φ).

Пусть даны две локальные карты (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и (V, ψ) с координатами $(y^1, \ldots, y^n)$. Найдем соотношения, связывающие дуальные базисы $(dx^1, \ldots, dx^n)$ и $(dy^1, \ldots, dy^n)$ этих карт.

Напомним, что в курсе тензорной алгебры мы доказали, что если $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – два базиса векторного пространства V, $(e^1, \ldots, e^n)$ и $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ – соответствующие им дуальные базисы, то

$$\varepsilon_i = C_i^j e_j; \quad \varepsilon^i = (C^{-1})_j^i e^j,$$

то есть дуальные базисы связаны с помощью обратной матрицы.

Используя этот факт, рассматривая 1-формы натурального базиса как гладкого сечения, и используя (1.21) получим

$$dy^i(p) = (p, dy^i|_p) = \left(p, \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_p dx^j|_p \right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) dx^j(p), \, \forall p \in U.$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрицы Якоби $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ и $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ являются взаимно обратными. Итак, мы получаем формулу, связывающую дуальные натуральные базисы

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j. \tag{1.27}$$

Пусть $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ – произвольная 1-форма. Она определяет отображение

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \tag{1.28}$$

по формуле

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \quad X \in \mathfrak{X}(M), \, p \in M.$$

Докажем, что это определение корректно, то есть функция $\omega(X)$ действительно является гладкой. Фиксируем локальную карту (U, φ) на M и произвольную точку $p \in U$. Тогда ковектор ω_p и касательный вектор X_p мы можем разложить по соответствующим натуральным базисам, следовательно,

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = (\omega_p)_i (dx^i)_p \left((X_p)^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = (\omega_p)_i (X_p)^i \tag{1.29}$$

Здесь мы воспользовались линейностью ковектора и дуальностью натуральных базисов. Отпускаем точку p и получаем, что сужение функции $\omega(X)$ на область произвольной карты является линейной комбинацией гладких функций

$$\omega(X) = \omega_i X^i,$$

то есть гладко. Тогда сама функция $\omega(X)$ гладкая по определению.

Задача 1.12. Докажите, что отображение (1.28) является $C^\infty(M)$-линейным.

Замечание 1.16. Можно доказать и обратное. А именно, что любое $C^\infty(M)$-линейное отображение

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \tag{1.30}$$

определяет гладкое сечение кокасательного расслоения s, причем отображение (1.29), определяемое s, совпадает с отображением ω.

Итак, дифференциальные 1-формы, с одной стороны, – это гладкие сечения кокасательного расслоения, а с другой стороны, – $C^\infty(M)$-линейные отображения вида (1.30).

§1.11. Векторное расслоение тензоров типа (r, s). Тензорные поля на многообразии.

11.1. Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Для каждой его точки p определено касательное пространство $T_p(M)$ и кокасательное пространства $T_p^*(M)$. Они являются n-мерными векторными пространствами и определяют векторное пространство $\mathfrak{T}_r^s(T_p(M))$ тензоров типа (r, s) (см. файл tenz alg.pdf).

При фиксации локальной карты (U, φ) на M с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ для каждого векторного пространства $\mathfrak{T}_r^s(T_p(M))$ определяется канонический базис

$$\left((dx^{i_1})_p \otimes \ldots \otimes (dx^{i_r})_p \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right|_p \right), \tag{1.31}$$

где $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ принимают значения от 1 до n, а $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right)$ и $((dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p)$ – натуральные базисы пространств $T_p(M)$ и $T_p^*(M)$ соответственно.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{T}_r^s M = \bigcup_{p \in M, t \in \mathfrak{T}_r^s(T_p(M))} (p, t)$$

и определим отображение $\pi : \mathfrak{T}_r^s M \to M$ формулой

$$\pi(p, t) = p.$$

Тогда тройка $(\mathfrak{T}_r^s M, \pi, M)$ будет векторным расслоением ранга n^{r+s}. Оно называется *расслоением тензоров типа* (r, s). Пусть $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ – атлас на многообразии M. Тогда в качестве карт на $\mathfrak{T}_r^s M$ возьмем пары (V_α, ψ_α), где $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, то есть полный прообраз областей карт из атласа $\mathfrak{A}$, а отображение ψ_α каждой точке $(p, t) \in V_\alpha$ ставит в соответствие $n + n^{r+s}$ чисел: первые n чисел – это координаты точки p в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, а остальные числа – это координаты тензора t в каноническом базисе (1.31).

Гладкие сечения $t : M \to \mathfrak{T}_r^s M$ называются *тензорными полями типа* (r, s) на M. Из общей теории гладких сечений мы получаем, что множество тензорных полей типа (r, s) обладает структурой $C^\infty(M)$-модуля, который мы будем обозначать $\mathfrak{T}_r^s(M)$.

Договоримся обозначать тензор, который ставит в соответствие тензорное поле t точке p, через t_p.

Если фиксировать соответствующие карты (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и (V, ψ) с координатами $(y^1, \dots, y^n, y_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s})$, $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$ на многообразиях M и $\mathfrak{T}_r^s M$ соответственно, то тензорное поле t задается системой функций

$$t : \begin{cases} y^i = x^i \\ y_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

Здесь $t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(x^1, \dots, x^n)$ – гладкие функции, то есть координаты тензора t_p гладким образом зависят от точки.

Для локальной карты (U, φ) определен $C^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{T}_r^s(U)$ тензорных полей типа (r, s), который содержит сужения $t|_U$ тензорных полей t, определенных на всем многообразии M. Аналогично случаю 1-форм доказывается, что любое сужение $t|_U$ тензорного поля t представимо в виде

$$t|_U = t_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}},$$

где $dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ – тензорные поля на U, определяемые формулой

$$dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) = (p, (dx^{j_1})_p \otimes \ldots \otimes (dx^{j_r})_p \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right|_p), \, p \in U.$$

Обычно знак сужения на область карты опускают и пишут

$$t = t^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r} dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}},$$

Тензорные поля $dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ называются *локальным базисом модуля* $\mathfrak{T}^s_r(M)$, а гладкие на U функции $t^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}$ называются *локальными координатами тензорного поля* t в карте (U, φ).

Пусть t – произвольное тензорное поле типа (r, s) на M. Тогда оно определяет $C^\infty(M)$-линейное по каждому аргументу отображение, которое мы будем обозначать той же буквой

$$t : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{s\,\text{раз}} \to C^\infty(M)$$

по формуле

$$t(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s)(p) = t_p((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p, (\omega^1)_p, \ldots, (\omega^s)_p), \tag{1.32}$$

где $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^1, \ldots, \omega^s \in \mathfrak{X}^*(M)$. Доказательство корректности определения аналогично доказательству для 1-форм, но более громоздко. Поэтому мы его опускаем.

Для тензорных полей имеет место замечание, аналогичное замечанию 1.16. Сформулируйте его самостоятельно.

Пример 1.29. Из определения 1-формы как $C^\infty(M)$-линейного отображения следует, что она является тензорным полем типа (1,0).

Пример 1.30. Менее тривиальным примером тензорного поля является векторное поле. Докажем, что векторное поле можно рассматривать как тензорное поле типа (0,1).

Рассмотрим множество $(\mathfrak{X}^*)^*(M)$ $C^\infty(M)$-линейных отображений вида

$$t : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M).$$

Стандартным способом в этом множестве можно ввести структуру $C^\infty(M)$-модуля. Оказывается, что он изоморфен модулю гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ на многообразии M. Изоморфизм $\tau : \mathfrak{X}(M) \to (\mathfrak{X}^*)^*(M)$ задается формулой

$$\tau(X)(\omega) = \omega(X), \quad X \in \mathfrak{X}(M), \, \omega \in \mathfrak{X}^*(M).$$

Нетрудно убедиться, что, во-первых, определение τ корректно, то есть $\tau(X)$ есть линейное отображение, во-вторых, τ является биекцией и, в-третьих, сохраняет операции сложения и умножения на гладкую функцию.

Благодаря изоморфизму τ любое векторное поле X может быть отождествлено со своим образом $\tau(X)$. Тогда действие векторного поля X на 1-форму ω может быть записано в виде

$$X(\omega) = \omega(X). \, \square \tag{1.33}$$

Пример 1.31. Пусть дано $C^\infty(M)$-линейное отображение

$$L : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M).$$

Оно называется *эндоморфизмом* модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$. Любой эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$ может быть отождествлен с тензорным полем типа (1,1).

Действительно, пусть дан эндоморфизм L. Определим отображение

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$$

по формуле

$$T(X, \omega) = \omega(L(X)), \, X \in \mathfrak{X}(M), \, \omega \in \mathfrak{X}^*(M). \tag{1.34}$$

Докажите, что это отображение будет линейно по каждому аргументу, то есть будет тензором типа (1,1).

Обратно, пусть дан тензор типа (1,1) T. Фиксируем произвольное векторное поле X и зададим отображение $L(X) : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ формулой

$$L(X)(\omega) = T(X, \omega), \, \omega \in \mathfrak{X}^*(M). \tag{1.35}$$

Это отображение будет $C^\infty(M)$-линейным, так как таковым является тензорное поле T, следовательно, в силу примера 1.30 отображение $L(X)$ может быть отождествлено с некоторым векторным полем. Тогда отображение $L : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ построим следующим образом: каждому векторному полю X поставим в соответствие построенное векторное поле $L(X)$. Так как тензорное поле T линейно по X, отображение L будет эндоморфизмом модуля гладких векторных полей.

Наконец, нам осталось доказать, что построенный эндоморфизм L порождает исходное тензорное поле T. Обозначим через t тензорное поле, которое порождает эндоморфизм L по формуле (1.34). Тогда

$$t(X, \omega) = \omega(L(X)) = L(X)(\omega) = T(X, \omega).$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.35) и примером 1.30. Итак, значения отображений t и T совпадают на любой паре аргументов, а значит, совпадают и сами отображения, то есть $t = T$.

Итак, любой эндоморфизм модуля гладких векторных полей может быть отождествлен с тензорным полем типа (1,1). В дальнейшем мы не будем делать различий между ними и будем говорить, что эндоморфизм модуля гладких векторных полей является тензорным полем типа (1,1). □

11.2. Пусть на гладком n-мерном многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ). Рассмотрим тензорное поле $t \in \mathfrak{T}^s_r(M)$. *(Локальными) компонентами* тензорного поля t в карте (U, φ) называются гладкие функции $t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}$ на U, определяемые формулами

$$t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} = t|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_s} \right). \tag{1.36}$$

Если фиксировать точку $p \in U$, то значение функции $t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}(p)$ в этой точке есть значение тензора t_p на наборе соответствующих векторов и ковекторов натуральных базисов карты (U, φ). Это компоненты тензора t_p в каноническом базисе

$$\left((dx^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{j_r})_p \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \dots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right|_p \right)$$

векторного пространства $\mathfrak{T}^s_r(T_p(M))$. Как известно из курса тензорной алгебры компоненты тензора совпадают с его координатами в каноническом базисе. Если мы отпустим точку p, то получим координаты тензорного поля в локальном базисе. Таким образом, компоненты тензорного поля относительно карты (U, φ) совпадают с его координатами относительно локального базиса.

Предложение 1.4 **.** *Локальные компоненты тензорного поля однозначно определяют его значение.*

Доказательство. Пусть дано тензорное поле t типа (r, s) и фиксирована локальная карта (U, φ) на многообразии M. Тогда для t определен набор гладких на U функций $\{t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}\}$, определенных формулой (1.36). Рассмотрим произвольный набор векторных полей $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ и произвольный набор 1-форм $\omega^1, \dots, \omega^s \in \mathfrak{X}^*(M)$. Разложим их по натуральным базисам локальной карты (U, φ):

$$\begin{matrix} X_1 = (X_1)^{i_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}; & \dots & X_r = (X_r)^{i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}; \\ \omega^1 = (\omega^1)_{j_1} dx^{j_1}; & \dots & \omega^s = (\omega^s)_{j_s} dx^{j_s}. \end{matrix}$$

Тогда используя свойство полилинейности тензорного поля, получим

$$t(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t \left((X_1)^{i_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, (X_r)^{i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, (\omega^1)_{j_1} dx^{j_1}, \dots, (\omega^s)_{j_s} dx^{j_s} \right) =$$

$$= (X_1)^{i_1} \dots (X_r)^{i_r} (\omega^1)_{j_1} \dots (\omega^s)_{j_s} t \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s} \right) = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} (X_1)^{i_1} \dots (X_r)^{i_r} (\omega^1)_{j_1} \dots (\omega^s)_{j_s}.$$

Итак, значение тензорного поля (а точнее, его сужение на область локальной карты) определяется по формуле

$$t(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} (X_1)^{i_1} \dots (X_r)^{i_r} (\omega^1)_{j_1} \dots (\omega^s)_{j_s},$$

а значит, определено однозначно компонентами тензорного поля в этой карте. □

Пусть даны две локальные карты на многообразии M: (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и (V, ψ) с координатами $(y^1, \dots, y^n)$, такие что пересечение их областей не пусто. Рассмотрим тензорное поле t типа (r, s). Обозначим компоненты тензорного поля t относительно первой карты через $\{t^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}\}$, а относительно второй карты – через $\{\tilde t^{a_1\dots a_s}_{b_1\dots b_r}\}$. Все индексы пробегают значения от 1 до n. Воспользуемся определением компонент тензорного поля, его $C^\infty(U)$-линейностью и формулами (1.21) и (1.27).

$$\tilde t^{a_1\dots a_s}_{b_1\dots b_r} = t\left(\frac{\partial}{\partial y^{b_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{b_r}},dy^{a_1},\dots,dy^{a_s}\right) = t\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{b_1}}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots,\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{b_r}}\frac{\partial}{\partial x^{j_r}},\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1},\dots,\frac{\partial y^{a_s}}{\partial x^{i_s}}dx^{i_s}\right) =$$
$$= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{b_1}}\dots\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{b_r}}\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{a_s}}{\partial x^{i_s}}t\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\dots\frac{\partial}{\partial x^{j_r}},dx^{i_1},\dots,dx^{i_s}\right) = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{b_1}}\dots\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{b_r}}\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{a_s}}{\partial x^{i_s}}t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}$$

Итак, при переходе от одного натурального базиса к другому компоненты тензорного поля преобразуются по закону

$$\tilde t^{a_1\dots a_s}_{b_1\dots b_r} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{b_1}}\dots\frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{b_r}}\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{a_s}}{\partial x^{i_s}}t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} \tag{1.37}$$

Этот закон преобразования компонент тензорного поля называется *тензорным законом.*

Замечание 1.17. Пусть в каждой карте многообразия M задана система гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$. Как и в курсе тензорной алгебры доказывается, что эти системы гладких функций задают тензорное поле типа (r,s), а сами являются его компонентами относительно натурального базиса, тогда и только тогда, когда при переходе от карты к карте они преобразуются по тензорному закону.

§1.12. Операции с тензорными полями.

Как мы уже знаем, множество тензорных полей типа (r,s) обладает структурой $C^\infty(M)$-модуля, а значит, в этом множестве введены операции сложения тензорных полей и умножение тензорного поля на гладкую функцию. Эти операции удовлетворяют обычным свойствам векторного пространства (только в них умножение на вещественное число заменено умножением на гладкую функцию). Заметим, что операции сложения и умножения тензорного поля на гладкую функцию мы вводили, рассматривая тензорное поле как гладкое сечение векторного расслоения тензоров типа (r,s).

Здесь мы введем операции с тензорными полями, рассматривая их как $C^\infty(M)$-линейные отображения. Нетрудно показать, что эти определения эквивалентны.

Начнем с операции сложения тензорных полей. Пусть даны два тензорных поля $t_1,t_2\in\mathfrak{T}^s_r(M)$. Определим отображение

$$t_1+t_2 : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\dots\times\mathfrak{X}(M)}_{r\text{раз}}\times\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\dots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{s\text{раз}}\to C^\infty(M)$$

по формуле

$$(t_1+t_2)(X_1,\dots,X_r,\omega^1,\dots,\omega^s) = t_1(X_1,\dots,X_r,\omega^1,\dots,\omega^s)+t_2(X_1,\dots,X_r,\omega^1,\dots,\omega^s).$$

Очевидно, что образом отображения t_1+t_2 является гладкая функция, как сумма таковых. Нетрудно показать $C^\infty(M)$-линейность отображения t_1+t_2 по каждому аргументу. Проведите доказательство для какого-нибудь аргумента самостоятельно. Итак, отображение t_1+t_2 является тензорным полем типа (r,s). Оно называется *суммой* тензорных полей t_1 и t_2.

Введем операцию умножения тензорного поля на гладкую функцию. Пусть дано тензорное поле $t\in\mathfrak{T}^s_r(M)$ и гладкая функция $f\in C^\infty(M)$. Тогда определим отображение

$$ft : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\dots\times\mathfrak{X}(M)}_{r\text{раз}}\times\underbrace{\mathfrak{X}^*(M)\times\dots\times\mathfrak{X}^*(M)}_{s\text{раз}}\to C^\infty(M)$$

по формуле

$$(ft)(X_1,\dots,X_r,\omega^1,\dots,\omega^s) = ft(X_1,\dots,X_r,\omega^1,\dots,\omega^s).$$

Опять нужно доказать, что введенное отображение $C^\infty(M)$-линейно по каждому аргументу (проведите рассуждения самостоятельно для какого-нибудь одного аргумента). Тогда мы получим, что отображение ft является тензорным полем типа (r,s). Это тензорное поле называется *произведением гладкой функции f на тензорное поле t.*

Введенные операции удовлетворяют восьми аксиомам векторного пространства. Для тренировки докажите любые две из этих аксиом. Здесь же мы отметим только, что нейтральным по сложению будет тензорное поле $0\in\mathfrak{T}^s_r(M)$, которое каждому набору аргументов ставит в соответствие нулевую функцию, то есть функцию, которая каждой точке многообразия ставит в соответствие нуль.

Введем еще одну операцию с тензорными полями, которая называется *тензорным произведением* тензорных полей. Пусть $t\in\mathfrak{T}^s_r(M)$, $T\in\mathfrak{T}^q_p(M)$ – произвольные тензорные поля, рассматриваемые как

$C^\infty(M)$-линейные по каждому аргументу отображения. Это определение мы введем по аналогии с определением тензорного произведения тензоров. Определим отображение

$$t \otimes T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r+p\,\text{раз}} \times \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{s+q\,\text{раз}} \to C^\infty(M)$$

по формуле

$$(t \otimes T)(X_1, \ldots, X_{r+p}, \omega^1, \ldots, \omega^{s+q}) = t(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s)T(X_{r+1}, \ldots, X_{r+p}, \omega^{s+1}, \ldots, \omega^{s+q}),$$

где $X_1, \ldots, X_{r+p} \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^1, \ldots, \omega^{s+q} \in \mathfrak{X}^*(M)$. Непосредственно проверяется, что определение корректно, то есть отображение $t \otimes T$ $C^\infty(M)$-линейно по каждому аргументу.

Замечание 1.18**.** Если мы будем рассматривать тензорные поля как гладкие сечения векторного расслоения тензоров типа (r, s), то операция тензорного умножения будет определяться следующим образом:

$$(t_1 \otimes t_2)(p) = (p, (t_1)_p \otimes (t_2)_p),$$

где $(t_1)_p$, $(t_2)_p$ – тензоры типа (r, s), для которых операция тензорного умножения уже введена в курсе Тензорная алгебра.

Оба определения эквивалентны. Это нетрудно проверить, используя формулу (1.32).

Операция тензорного умножения обладает следующими свойствами:

1^0. $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3$;

2^0. $t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3$;

3^0. $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$;

4^0. $(ft) \otimes T = t \otimes (fT) = f(t \otimes T)$,

где t_1, t_2, t_3, t, T – тензорные поля подходящих типов, $f \in C^\infty(M)$. Эти свойства можно непосредственно проверить, используя определения суммы тензорных полей, произведения тензорного поля на гладкую функцию и определение тензорного произведения тензорных полей.

Замечание 1.19**.** Если тензорные поля рассматриваются как гладкие сечения векторного расслоения тензоров, то с учетом формулы (1.32) нетрудно видеть, что введенное выше определение тензорного умножения эквивалентно следующему определению

$$(t_1 \otimes t_2)(p) = (p, (t_1)_p \otimes (t_2)_p).$$

Рассмотрим еще одну операцию с тензорными полями. Она называется *сверткой* тензорного поля t по a-му верхнему и b-му нижнему индексам. Пусть $t \in \mathfrak{T}^s_r(M)$ – произвольное тензорное поле. Тогда сверткой тензорного поля t называется тензорное поле $C^{(a)}_{(b)}t$ типа $(r-1, s-1)$, задаваемое формулой

$$C^{(a)}_{(b)}t(p) = (p, C^{(a)}_{(b)}t_p),$$

то есть в каждой точке многообразия M значение тензорного поля $C^{(a)}_{(b)}t$ есть соответствующая свертка тензора t_p. Рассматривая сужение отображения $C^{(a)}_{(b)}t$ на область произвольной локальной карты многообразия M легко убедиться, что отображение $C^{(a)}_{(b)}t$ является гладким сечением расслоения тензоров типа (r, s), то есть тензорным полем.

Задача 1.13**.** Проведите подробные рассуждения самостоятельно.

Мы можем ввести определение свертки тензорного поля и напрямую. А именно, *сверткой* тензорного поля t типа (r, s) по a-му верхнему и b-му нижнему индексам называется отображение

$$C^{(a)}_{(b)}t : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-1\text{раз}} \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{s-1\text{раз}} \to C^\infty(M),$$

задаваемое в каждой локальной карте формулой

$$(C^{(a)}_{(b)}t)(X_1, \ldots, X_{r-1}, \omega^1, \ldots, \omega^s) = t(X_1, \ldots, X_{b-1}, \frac{\partial}{\partial x^k}, X_b, \ldots, X_{r-1}, \omega^1, \ldots, \omega^{a-1}, dx^k, \omega^a, \ldots, \omega^{s-1}). \tag{1.38}$$

Здесь в правой части равенства стоят сужения соответствующих объектов на область локальной карты. При таком определении свертки нужно доказать, во-первых, что она не зависит от выбора локальной карты и, во-вторых, что для определенных на локальных картах отображений, стоящих в правой части равенства (1.38), существует единое глобально определенное отображение $C^{(a)}_{(b)}t$. Благодаря условиям хаусдорфовости и счетности базы, которые мы наложили при определении многообразия, это можно доказать. Само доказательство мы опускаем из-за громоздкости.

Наконец, отметим, что оба определения свертки эквивалентны.

Задача 1.14**.** Запишите операции сложения тензорных полей, умножения тензорного поля на функцию, тензорного умножения и свертки в компонентах.

Замечание 1.20**.** Непосредственными вычислениями с использованием определения операции свертки, сложения тензорных полей и умножения тензорного поля на гладкую функцию показывается, что отображение свертки

$$C^{(a)}_{(b)} : \mathfrak{T}^s_r(M) \to \mathfrak{T}^{s-1}_{r-1}(M)$$

является $C^\infty(M)$- линейным отображением, то есть

$$C^{(a)}_{(b)}(ft_1 + gt_2) = fC^{(a)}_{(b)}(t_1) + gC^{(a)}_{(b)}(t_2),$$

где $f, g \in C^\infty(M)$, $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}^s_r(M)$.

Рассмотрим ряд задач для тензорных операций с тензорными полями.

Задача 1.15**.** Докажите, что для тензорного поля t типа $(r, 0)$ и тензорного поля T типа $(0, s)$ имеет место равенство $t \otimes T = T \otimes t$.

Указание. Подействуйте обеими частями равенства на набор $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^1, \dots, \omega^s \in \mathfrak{X}^*(M)$. $\square$

Пример 1.32**.** Пусть η – произвольная 1-форма, ξ – произвольное векторное поле из $\mathfrak{X}(M)$. Тогда их тензорное произведение $\eta \otimes \xi$ является тензорным полем типа (1,1). Вычислим значение этого тензорного поля на паре $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$:

$$(\eta \otimes \xi)(X, \omega) = \eta(X)\xi(\omega) = \eta(X)\omega(\xi) = \omega(\eta(X)\xi).$$

Мы воспользовались определением тензорного произведения и примером 1.30. Согласно (1.35) левая часть этого выражения равна $\omega((\eta \otimes \xi)(X))$. Тогда получим

$$\omega((\eta \otimes \xi)(X)) = \omega(\eta(X)\xi). \tag{1.39}$$

В силу (1.33) это равенство можно записать в виде

$$((\eta \otimes \xi))(X)(\omega) = (\eta(X)\xi)(\omega).$$

Так как полученное равенство верно для любой формы ω, имеем

$$(\eta \otimes \xi)(X) = \eta(X)\xi$$

Пример 1.33**.** Пусть L – тензорное поле типа (1,1). Рассмотрим натуральный базис $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ в $\mathfrak{X}(U)$ и дуальный базис $(dx^1, \dots, dx^n)$. Тогда свертка тензорного поля L по первому нижнему и первому верхнему индексам (см. определение свертки)

$$C^{(1)}_{(1)}L = L(\frac{\partial}{\partial x^k}, dx^k) = dx^k(L(\frac{\partial}{\partial x^k})) = L^k_k$$

будет гладкой функцией на U. Эта функция называется *следом тензорного поля* L и обозначается $tr\, L$. $\square$

Задача 1.16**.** Докажите, что для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 1-формы $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$, тензорного поля g типа (2,0) и эндоморфизма L имеют место соотношения

$$\begin{array}{ll} 1)\ \eta(X) = \eta_i X^i; & 2)\ g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j; \\ 3)\ L(X) = L^i_j X^j \frac{\partial}{\partial x^i}; & (L(X))^i = L^i_j X^j. \end{array}$$

Решение. Докажем первое равенство. Фиксируем локальную карту (U, φ) на гладком многообразии M и рассмотрим натуральный базис этой карты $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Разложим по этому базису векторное поле X: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда используя линейность 1-формы, получим

$$\eta(X) = \eta\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \eta_i.$$

В последнем равенстве мы использовали определение компонент тензорного поля.

Второе равенство доказывается аналогичным образом.

Докажем третье равенство. Опять разложим векторное поле X по натуральному базису, подставим в левую часть равенства и воспользуемся линейностью эндоморфизма

$$L(X) = L\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i L\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{1.40}$$

Чтобы продолжить цепочку равенств, мы вспомним, каким образом получается матрица эндоморфизма. Заметим, что $L\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ является векторным полем, а значит, раскладывается по натуральному базису. Коэффициентами разложения будут элементы матрицы эндоморфизма L, то есть мы получим

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = L_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Возвращаемся к цепочке равенств (1.40) и подставляем полученный результат:

$$L(X) = X^i L_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Коэффициенты перед базисными векторными полями суть координаты векторного поля $L(X)$ в натуральном базисе. Эту фразу мы можем записать в виде равенства:

$$(L(X))^j = X^i L_i^j.$$

□

Пример 1.34**.** "Упростим"тензорные выражения: а) $C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi)$; б) $C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X)$; в) $C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X)$, где $\xi, X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$, L – тензорное поле типа (1,1).

а) Это тензорное поле типа (0,0), то есть гладкая функция. Так как тензорное поле $\eta \otimes \xi$ является тензорным полем типа (1,1), то его свертка есть след этого тензорного поля (см. пример 1.33). Тогда

$$C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi) = (\eta \otimes \xi)_k^k = \eta_k \xi^k = \eta(\xi).$$

б) Рассмотрим тензорное поле $C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X)$. Это тензорное поле типа (0,1), то есть векторное поле. Найдем координаты этого векторного поля (воспользуемся результатами задачи 1.14):

$$(C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)_j^{ij} = L_j^i X^j = \left(L\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)^i = (L(X))^i.$$

Получим, что функции $(C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X))^i$ суть координаты векторного поля $L(X)$, то есть

$$C_{(1)}^{(2)}(L \otimes X) = L(X).$$

в) Рассмотрим тензорное поле $C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X)$. Это тензорное поле типа (0,1), то есть векторное поле. Найдем его координаты (воспользуемся результатами задачи 1.14):

$$(C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X))^i = (L \otimes X)_j^{ji} = L_j^j X^i = (tr\, L) X^i.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 1.33. Аналогично пункту б) делаем вывод, что

$$C_{(1)}^{(1)}(L \otimes X) = (tr\, L) X. \, \square$$

Задача 1.17**.** Пусть L – тензорное поле типа (1,1), то есть эндоморфизм, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$. "Упростите"тензорные выражения: а) $C_{(1)(2)}^{(1)(2)}(\eta \otimes L \otimes X)$, б) $C_{(2)(1)}^{(1)(2)}(\eta \otimes L \otimes X)$.

Ответ: а) $\eta(L(X))$; б) $(tr\, L)\eta(X)$.

Пример 1.35. Рассмотрим два эндоморфизма I и J модуля векторных полей $\mathfrak{X}(M)$. Очевидно, что композиция $I \circ J$ этих эндоморфизмов также является эндоморфизмом, то есть тензорным полем типа (1,1). Выразим его с помощью тензорных операций через эндоморфизмы I и J.

Рассмотрим произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда $(I \circ J)(X)$ – векторное поле. Выразим его координаты:

$$((I \circ J)(X))^i = (I(J(X)))^i = I^i_j(J(X))^j = I^i_j J^j_k X^k = (I \otimes J)^{ij}_{jk} X^k = (C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))^i_k X^k = ((C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))(X))^i. \tag{1.41}$$

Так как координаты векторных полей в крайне правой и крайне левой частях цепочки равенств равны, то равны и сами векторные поля, то есть

$$(I \circ J)(X) = (C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J))(X)$$

Это верно для любого векторного поля X, а значит, равны и сами отображения, то есть

$$I \circ J = C^{(2)}_{(1)}(I \otimes J).$$

В частности, из цепочки равенств (1.41) еще одну полезную формулу

$$(I \circ J)^i_j = I^i_k J^k_j. \tag{1.42}$$

Задача 1.18. Пусть L – эндоморфизм, $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Выразите через тензорные операции композицию $\eta \circ L$ и определите вид полученного тензорного поля. Выразите компоненты тензорного поля $\eta \circ L$ через компоненты тензорных полей L и η.

Ответ: $\eta \circ L = C^{(1)}_{(1)}(\eta \otimes L)$; $(\eta \circ L)_i = \eta_j L^j_i$.

Пример 1.36. Пусть на гладком многообразии M даны тензорное поле g типа (2,0) и тензорное поле J типа (1,1). Докажем, что утверждение " равенство

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0 \tag{1.43}$$

верно для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ " равносильно выполнению равенства $C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J) = 0$.

Рассмотрим левую часть равенства (1.43). Получим

$$\begin{aligned} g(JX, Y) + g(X, JY) &= g\left(J\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right), Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, J\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) = X^i Y^j J^k_i g_{kj} + X^i Y^j J^k_j g_{ik} = \\ &= (J \otimes g)^k_{ikj} X^i Y^j + (g \otimes J)^k_{ikj} X^i Y^j = C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g)_{ij} X^i Y^j + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J)_{ij} X^i Y^j = \\ &= C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g)(X, Y) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J)(X, Y) = (C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J))(X, Y). \end{aligned}$$

Тогда равенство (1.43) может быть записано в виде

$$(C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J))(X, Y) = 0.$$

Так как в левой части этого равенства стоит значение тензорного поля $C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J)$ на произвольном наборе аргументов $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, эти аргументы можно снять и записать, что само тензорное поле равно нулю, то есть равенство (1.43) равносильно равенству

$$C^{(1)}_{(2)}(J \otimes g) + C^{(1)}_{(2)}(g \otimes J) = 0,$$

что и требовалось доказать. Будем говорить при этом, что в исходном равенстве мы сняли аргументы.

Задача 1.19. Снимите аргументы в равенстве

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

где Φ – тензорное поле типа (1,1), g – тензорное поле типа (2,0), η – 1-форма.

Ответ. $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(g \otimes \Phi \otimes \Phi) = g - \eta \otimes \eta$.

Задача 1.20. Снимите аргументы в равенстве

$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX,$$

где T – тензорное поле типа (2,1), ψ – 1-форма, J – тензорное поле типа (1,1).

Ответ. $T = \psi \otimes id + id \otimes \psi - C^{(1)}_{(1)}(\psi \otimes J) \otimes J - J \otimes (C^{(1)}_{(1)}(\psi \otimes J)$.

§1.13. Алгебра Грассмана гладкого многообразия.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Рассмотрим множество всех тензорных полей типа $(r, 0)$ для любого r от нуля до бесконечности. Под тензорным полем типа (0,0) будем понимать гладкие функции на многообразии M. Это множество мы обозначим $\mathfrak{T}_*(M)$. Складывать будем только тензорные поля одного типа, а умножение на гладкую функцию и тензорное умножение будет таким же как в курсе Анализ на многообразиях. Эти операции вводят в множестве $\mathfrak{T}_*(M)$ структуру алгебры, а операции сложения и умножения на гладкую функцию определяют структуру $C^\infty(M)$-модуля каждом из множеств $\mathfrak{T}^0_r(M)$.

Если фиксировать r, то в множестве $\mathfrak{T}^0_r(M)$ тензорных полей типа $(r, 0)$ определено действие группы подстановок S_r порядка r. Напомним, что *подстановкой* называется таблица вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix},$$

где $\sigma(1), \dots, \sigma(r)$ – это числа $1, \dots, r$, поставленные в другом порядке. Каждая подстановка $\sigma \in S_r$ определяет отображение

$$\sigma : \mathfrak{T}^0_r(M) \to \mathfrak{T}^0_r(M),$$

по формуле

$$(\sigma t)(X_1, \dots, X_r) = t(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}).$$

Другими словами, подстановка σ переставляет аргументы у тензорного поля t. При этом говорят, что группа подстановок определяет действие на множестве тензорных полей $\mathfrak{T}^0_r(M)$.

Пример 1.37. Пусть даны две подстановки $\sigma, \tau \in S_r$. Тогда определена их композиция $\tau \circ \sigma$. Это подстановка из группы S_r. Она получается следующим образом: сначала числа от 1 до r переставляет подстановка σ, а затем, полученный набор чисел переставляет подстановка τ. Каждая из трех подстановок σ, τ и $\tau \circ \sigma$ определяет соответствующее отображение. Выясним, как связаны между собой эти отображения. Имеем для любого тензорного поля $t \in \mathfrak{T}^0_r(M)$

$$(\tau \circ \sigma)(t)(X_1, \dots, X_r) = t(X_{\tau\circ\sigma(1)}, \dots, X_{\tau\circ\sigma(r)}) = (\tau(t))(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \sigma(\tau(t))(X_1, \dots, X_r).$$

Это равенство верно для любого набора векторных полей $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, следовательно,

$$(\tau \circ \sigma)(t) = \sigma(\tau(t)).$$

Действие, удовлетворяющее такому закону композиции, называется *правым действием*. Также говорят, что группа подстановок S_r *действует на множестве тензорных полей* $\mathfrak{T}^0_r(M)$ *справа*.

Определение 1.11. Тензорное поле $t \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ называется *симметричным* (или *симметрическим*), если для любой подстановки $\sigma \in S_r$ имеем

$$\sigma(t) = t.$$

Тензорное поле $t \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ называется *кососимметрическим*, если для любой подстановки $\sigma \in S_r$ имеем

$$\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t,$$

где $\varepsilon(\sigma)$ – индекс подстановки σ. Напомним, что знак подстановки вычисляется следующим образом: нужно найти количество пар $(i, j), i < j$ из верхней строки подстановки, для которых $\sigma(i) > \sigma(j)$. Если количество таких пар четно, то подстановка называется *четной* и ее индекс равен 1, а если – нечетно, то подстановка называется *нечетной* и ее индекс равен -1.

Задача 1.21. Докажите, что тензорное поле t является кососимметричным тогда и только тогда, когда значение тензорного поля t меняется на противоположное при любой перестановке пары его аргументов.

Решение. Пусть t кососимметричен. Докажем, что его значение меняется на противоположное при перестановке первой пары аргументов. Для остальных случаев доказательство аналогично. Для подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ 2 & 1 & 3 & \dots & r \end{pmatrix}$$

имеем

$$t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r) = (\sigma(t))(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r) = -1 \cdot t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r).$$

Здесь мы воспользовались определением кососимметрического тензорного поля и нечетностью подстановки σ.

Обратно, пусть тензорное поле меняет свое значение на противоположное при любой перестановке двух его аргументов. Рассмотрим произвольную подстановку $\sigma \in S_r$. Как известно из алгебры, любая подстановка представима в виде композиции транспозиций, то есть подстановок, у которых меняются местами только два числа, остальные же числа остаются на своих местах. Если подстановка четная, то количество таких транспозиций четно, а если – нечетная, то – нечетно. Тогда для подстановки σ получим разложение в композицию транспозиций

$$\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n.$$

Рассмотрим тензорное поле $\sigma(t)$. Имеем

$$\sigma(t)(X_1,\ldots,X_r) = (\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n)(t)(X_1,\ldots,X_r) = \tau_n(\ldots(\tau_1(t))\ldots)(X_1,\ldots,X_r) =$$
$$= \tau_{n-1}(\ldots(\tau_1(t))\ldots)(X_{\tau_n(1)},\ldots,X_{\tau_n(r)}) = -\tau_{n-1}(\ldots(\tau_1(t))\ldots)(X_1,\ldots,X_r)$$

и так далее. Здесь мы воспользовались тем, что транспозиция переставляет два аргумента местами, а условие позволяет нам вернуть их на место, поставив знак минус. Количество минусов равно количеству транспозиций, следовательно, мы получим, что $\sigma(t) = -t$ для нечетной подстановки и $\sigma(t) = t$ для четной подстановки. Эти два случая объединяются в равенство $\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$. Итак, тензорное поле t получилось кососимметрическим по определению. □

Задача 1.22. Докажите, что тензорное поле t является симметричным тогда и только тогда, когда значение тензорного поля t не меняется при любой перестановке пары его аргументов.

Замечание 1.21. Будем говорить, что тензорное поле $t \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ *симметрично по первой паре аргументов*, если

$$t(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_r) = t(X_2, X_1, X_3, \ldots, X_r),$$

где $X_1, \ldots, X_r$ – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Аналогичным образом определяется симметричность по любой паре аргументов.

Будем говорить, что тензорное поле $t \in \mathfrak{T}^0_r(M)$ *кососимметрично по первой паре аргументов*, если

$$t(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_r) = -t(X_2, X_1, X_3, \ldots, X_r),$$

где $X_1, \ldots, X_r$ – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Аналогичным образом определяется кососимметричность по любой паре аргументов.

Задача 1.23. Пусть на многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ). Убедитесь, что симметричность тензорного поля по первым двум аргументам (по остальным парам индексов аналогично) в компонентах имеет вид

$$t_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_r} = t_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_r}. \tag{1.44}$$

При этом говорят, что тензорное поле *симметрично по первой паре индексов*.

Запишите условие кососимметричности тензорного поля по первым двум аргументам в компонентах.

Обозначим множество всех симметричных тензорных полей многообразия M через $\mathscr{S}_r(M)$, а множество всех кососимметричных тензорных полей – через $\Lambda_r(M)$. Очевидно, что эти множества замкнуты относительно операций сложения и умножения на гладкую функцию, а значит, являются подмодулями $C^\infty(M)$-модуля $\mathfrak{T}^0_r(M)$. Элементы модуля $\Lambda_r(M)$ называются также *внешними r-формами* (или, короче, *r-формами*).

Напомним несколько фактов из теории проекторов (подробности можете посмотреть в файле tenz alg.pdf. Там вводятся проекторы для векторных пространств, но все тоже самое верно и в случае произвольного модуля). Пусть дан K-модуль V (буква K обозначает коммутативную ассоциативную алгебру с единицей. Из этой алгебры мы берем скаляры, на которые умножаем элементы из V). Тогда K-линейное отображение $P : V \to V$ называется *проектором*, если $P \circ P = P$. В ряде задач удобнее пользоваться критерием проектора: условие $P \circ P = P$ равносильно условию $\forall a \in Im\, P \Rightarrow P(a) = a$, где $Im\, P$ – образ отображения P.

Если на модуле V задан проектор P, то этот модуль распадается в прямую сумму двух подмодулей – образа $Im\, P$ проектора P и ядра проектора P – $Ker\, P$, то есть $V = Im\, P \oplus Ker\, P$. Верно и обратное утверждение: если модуль V представим в виде прямой суммы своих подмодулей, то есть $V = A \oplus B$, то существует проектор $P : V \to V$, такой что $A = Im\, P$, $B = Ker\, P$. Наконец, отображение $Q = id - P$ также является проектором и называется *дополнительным проектором* для проектора P. Так как условие дополнительности обладает свойством симметричности, поэтому говорят, что проекторы P и Q *взаимно дополнительные*.

Договоримся K-линейное отображение $P : V \to V$ называть также *эндоморфизмом* модуля V. Хотя в этом термине нет подсказки о скалярах, на которые умножаются элементы из V, зато он красиво звучит.

Вернемся к подмодулям $\mathscr{S}_r(M)$ и $\Lambda_r(M)$. Определим два отображения

$$Sym : \mathfrak{T}^0_r(M) \to \mathscr{S}_r(M); \quad Alt : \mathfrak{T}^0_r(M) \to \Lambda_r(M)$$

формулами
$$Sym(t) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\sigma(t); \quad Alt(t) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon(\sigma)\sigma(t). \tag{1.45}$$

Задача 1.24. Докажите, что введенные отображения определены корректно, то есть $Sym(t) \in \mathscr{S}_r(M)$, $Alt(t) \in \Lambda_r(M)$. Докажите, что эти отображения действительно являются проекторами. Будут ли они взаимно дополнительными? (Подробное доказательство для случая векторного пространства проведено в файле tenz alg.pdf. Переведите его на случай модуля тензорных полей.)

Отображения Sym и Alt называются *эндоморфизмами (операторами) симметризации и альтернирования* соответственно.

Пример 1.38. Вычислим компоненты тензорного поля $Sym(t)$, где $t \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Фиксируем локальную карту (U,φ) и рассмотрим натуральный базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Тогда по определению компонент тензора получим
$$(Sym(t))_{ij} = Sym(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\left(t\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + t\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = \frac{1}{2}(t_{ij}+t_{ji}).$$

Обычно компоненты тензорного поля $Sym(t)$ обозначают с помощью круглых скобок следующим образом: $t_{(ij)}$. Тогда полученная формула примет вид
$$t_{(ij)} = \frac{1}{2}(t_{ij}+t_{ji}).$$

Задача 1.25. Пусть $t \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Обозначим компоненты тензорного поля $Alt(t)$ в натуральном базисе через $t_{[ij]}$. Докажите, что
$$t_{[ij]} = \frac{1}{2}(t_{ij}-t_{ji}).$$

Задача 1.26. Докажите формулы
$$t_{(ijk)} = \tfrac{1}{6}(t_{ijk}+t_{jki}+t_{kij}+t_{jik}+t_{kji}+t_{ikj}); \quad t_{[ijk]} = \tfrac{1}{6}(t_{ijk}+t_{jki}+t_{kij}-t_{jik}-t_{kji}-t_{ikj}),$$
где $t \in \mathfrak{T}_3^0(M)$, а через $t_{(ijk)}$ и $t_{[ijk]}$ обозначены компоненты тензорных полей $Sym(t)$ и $Alt(t)$ соответственно.

Замечание 1.22. Операции симметризации и альтернирования можно определить не только для всего тензорного поля, но и для какой-либо группы его аргументов. Например, определим операцию альтернирования для первых трех аргументов тензорного поля t типа $(5,0)$. Наиболее наглядно ее определение в компонентах. Пусть фиксирована локальная карта. Тогда
$$t_{[ijk]tp} = \frac{1}{3!}(t_{ijktp}+t_{jkitp}+t_{kijtp}-t_{jiktp}-t_{kjitp}-t_{ikjtp}). \tag{1.46}$$

Принцип обозначения компонент альтернированного тензорного поля тот же, что и при определении альтернации для всего тензорного поля. Коэффициент $\frac{1}{3!}$ определяется количеством аргументов (индексов), по которым проводится альтернирование.

Аналогичным образом определяется операция симметризации тензорного поля по нескольким аргументам.

Определение симметричности и кососимметричности тензорного поля переносится на случай, когда рассматривается только часть его аргументов. Например, тензорное поле t типа $(5,0)$ называется *симметричным по первым трем аргументам*, если его значение не меняется при любой перестановке этих аргументов. Это тензорное поле называется *кососимметрическим по первым трем аргументам* если оно меняет значение на противоположное при нечетной перестановке этих аргументов и не меняет значения при их четной перестановке. Если фиксировать локальную карту на многообразии M, то аналогично (1.44) эти определения можно записать в компонентах. При этом мы будем говорить о симметричности и кососимметричности по первым трем индексам.

Замечание 1.23. Операции симметризации и альтернирования определяются аналогичным образом для тензорных полей типа $(0,r)$.

Кроме того, можно определить операции симметризации и альтернирования по нескольким одноименным аргументам (то есть либо берем векторные поля, либо 1-формы) для тензорных полей типа (r,s). Например, симметризация по двум первым аргументам 1-формам (по двум первым верхним индексам) для тензорного поля t типа $(3,4)$ задается формулой
$$t_{ijk}^{(pt)mq} = \frac{1}{2!}(t_{ijk}^{ptmq}+t_{ijk}^{tpmq}).$$

Обозначим через $\Lambda_*(M)$ множество всех кососимметрических тензорных полей из $\Lambda_r(M)$ для всех r от нуля до бесконечности. Под $\Lambda_0(M)$ будем понимать множество гладких функций многообразия M. В множестве $\Lambda_*(M)$ уже введены операции сложения и умножения на гладкую функцию (они превращают это множество в $C^\infty(M)$-модуль), а оператор альтернирования поможет нам определить в этом множестве операцию умножения, которая превратит его в алгебру. Полученная алгебра называется *внешней алгеброй* многообразия M или *алгеброй Грассмана гладкого многообразия* M.

Определение 1.12. Отображение

$$\wedge : \Lambda_r(M) \times \Lambda_r(M) \to \Lambda_{r+s}(M),$$

заданное формулой

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\sigma(\omega \otimes \theta), \tag{1.47}$$

называется *операцией внешнего умножения.* (Для написания последнего равенства мы воспользовались формулой (1.45).)

Очевидно, что определение корректно, то есть применяя операцию внешнего умножения к двум внешним формам, мы получим внешнюю форму.

Так как 0-формами мы назвали гладкие функции, то $f \wedge \omega = f\omega$, то есть внешнее умножение функции и формы совпадает с умножением функции (как скаляра) на форму (как элемент модуля). В частности, $f \wedge \omega = \omega \wedge f$.

Задача 1.27. Докажите, что операция внешнего умножения обладает свойствами

$$\begin{array}{ll} 1) \quad (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3; & 2) \quad \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3; \\ 3) \quad (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3), & \end{array}$$

где в каждом из случаем омеги принадлежат подходящим $\Lambda_r(M)$. В частности, из свойства 3) следует $C^\infty(M)$-линейность операции внешнего умножения, то есть

$$(f\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (f\omega_2) = f(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Пример 1.39. Докажем, что для 1-форм операция внешнего умножения антикоммутативна, то есть

$$\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega, \tag{1.48}$$

где $\omega, \theta \in \Lambda_1(M) \equiv \mathfrak{X}^*(M)$. В частности, для 1-формы ω получим

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Действительно, по определению операции внешнего умножения для любой пары векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ получим

$$\omega \wedge \theta(X,Y) = \frac{2!}{1!1!} Alt(\omega \otimes \theta)(X,Y) = \frac{2!}{1!1!}\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma)(\sigma(\omega \otimes \theta))(X,Y) = (\omega \otimes \theta)(X,Y) - (\omega \otimes \theta)(Y,X) =$$

$$= \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что в группе S_2 содержится две подстановки: четная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и нечетная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично рассуждая получим, что

$$\theta \wedge \omega(X,Y) = \theta(X)\omega(Y) - \theta(Y)\omega(X).$$

Сравнивая полученные равенства убеждаемся в истинности формулы (1.48).

Если положить в доказанной формуле $\omega = \theta$, получим

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega,$$

то есть $\omega \wedge \omega = 0$.

Замечание 1.24. В примере мы вывели формулу, которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем

$$\omega \wedge \theta(X,Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X), \tag{1.49}$$

где ω и θ – 1-формы.

Модуль $\Lambda_r(M)$ в общем случае не обладает базисом (также как и модуль векторных полей, модуль дифференциальных 1-форм и модуль тензорных полей типа (r,s)). Но если взять его сужение на область локальной карты, то возникнет базис. Он строится следующим образом. Для локальной карты существует натуральный базис 1-форм $(dx^1,\ldots,dx^n)$. Тогда система форм

$$(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}),\quad i_1<\ldots<i_r,$$

будет базисом модуля $\Lambda_r(U)$ (доказательство полностью аналогично доказательству соответствующего утверждения из файла tenz alg.pdf). В таком базисе координаты r-формы ω (то есть коэффициенты ее разложения по данному базису) совпадают с ее компонентами (то есть ее значениями на векторных полях натурального базиса)(доказательство аналогично доказательству из файла tenz alg.pdf, но результат получается другой из-за другого определения операции внешнего умножения – коэффициента $\frac{(r+s)!}{r!s!}$), то есть

$$\omega_{i_1\ldots i_r}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right). \tag{1.50}$$

Пример 1.40. Покажем, что для 2-формы Ω ее координаты относительно базиса $\{dx^i\wedge dx^j(i<j)\}$ совпадают с ее компонентами $\Omega_{ij}=\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

2-форма Ω является тензорным полем типа (2,0), следовательно, может быть разложена по базису $\{dx^i\otimes dx^j\}$ модуля тензорных полей типа (2,0). При этом координаты формы Ω относительно этого базиса совпадают с ее компонентами относительно натурального базиса (это доказывается аналогично доказательству в курсе тензорной алгебры), то есть

$$\Omega=\Omega_{ij}dx^i\otimes dx^j;\quad \Omega_{ij}=\Omega\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Применим оператор альтернирования Alt к этому равенству. Так как форма является кососимметрическим тензорным полем, то есть принадлежит образу эндоморфизма альтернирования, получим $Alt(\Omega)=\Omega$. В силу линейности эндоморфизма альтернирования функции Ω_{ij} выносятся за знак альтернации и суммы разбиваются. Тогда применив определение операции внешнего умножения (1.47), получим

$$\Omega=\Omega_{ij}\frac{1!1!}{2!}dx^i\wedge dx^j.$$

Заметим, что здесь индексы i и j принимают всевозможные значения. Чтобы получить разложение 2-формы по базису $\{dx^i\wedge dx^j(i<j)\}$, то есть базисные формы упорядочены по номерам, представим имеющееся разложение в виде двух сумм

$$\Omega=\Omega_{ij}\frac{1!1!}{2!}dx^i\wedge dx^j=\frac{1}{2}\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j(i<j)+\frac{1}{2}\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j(i>j)=\frac{1}{2}\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j(i<j)+$$
$$+\frac{1}{2}\Omega_{ji}dx^j\wedge dx^i(j>i)=\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j(i<j).$$

Во второй группе слагаемых мы переобозначили индексы суммирования i и j, воспользовались кососимметричностью компонент Ω_{ij} и антикоммутативностью внешнего произведения 1-форм.

Итак, в разложении 2-формы Ω по базису 2-форм мы получили те же компоненты Ω_{ij}.

Задача 1.28. Докажите, что для 3-формы выполняется утверждение аналогичное утверждению предыдущего примера.

Задача 1.29. Докажите, что для $\omega\in\Lambda_r(M)$ и $\theta\in\Lambda_s(M)$ имеем

$$\omega\wedge\theta=(-1)^{rs}\theta\wedge\omega.$$

Указание. Фиксируйте локальную карту и рассмотрите разложение формы $\omega\wedge\theta$ по локальному базису $(r+s)$-форм.

Глава 2. Линейная связность гладкого многообразия.

§2.1. Оператор ковариантного дифференцирования.

Определение 2.1. Пусть M – гладкое n-мерное многообразие. *Линейной связностью (или аффинной связностью)* или *оператором ковариантного дифференцирования* на многообразии M называется отображение

$$\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),$$

сопоставляющее каждой пре векторный полей $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ векторное поле $\nabla_XY\in\mathfrak{X}(M)$ и обладающее свойствами

(1) $\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$ (линейность по первому аргументу);

(2) $\nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ (аддитивность по второму аргументу);

(3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (правило Лейбница),

где $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется *ковариантной производной* векторного поля Y в направлении векторного поля X. Многообразие, на котором фиксирована аффинная связность, называется *пространством аффинной связности.*

Пусть на многообразии M фиксирована локальная карта (U,φ) с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$. Найдем локальные координаты векторного поля $\nabla_X Y$ в этой карте. Как обычно, обозначим через $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ натуральный базис карты, а через $\{dx^i\}$ – дуальный базис. Тогда векторные поля (а точнее их сужения на область карты) представимы в виде

$$X = X^i \tfrac{\partial}{\partial x^i}; \quad Y = Y^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}.$$

Подставим эти разложения в $\nabla_X Y$ и воспользуемся свойствами отображения ∇ (см. определение 2.1):

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^i\left(\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Рассмотрим векторные поля $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}$ и разложим их по натуральному базису. Коэффициенты разложения обозначим через Γ^k_{ij}. Это гладкие функции на области карты U.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Тогда получим

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)X^i = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j\Gamma^k_{ij}\right)X^i\frac{\partial}{\partial x^k}$$

В первом слагаемом в скобках мы поменяли индекс суммирования j на индекс суммирования k, для того чтобы вынести векторное поле $\frac{\partial}{\partial x^k}$ за скобки. Итак, мы получили формулу для вычисления ковариантной производной векторного поля Y в направлении векторного поля X:

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j\Gamma^k_{ij}\right)X^i\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.1}$$

Функции Γ^k_{ij}, определенные в области каждой карты многообразия M, называются *обобщенными коэффициентами Кристоффеля* связности ∇.

Задача 2.1**.** Пусть на многообразии M дана еще одна карта (V,ψ) с координатами $(y^1,\ldots,y^n)$ и пусть $\{\tilde{\Gamma}^k_{ij}\}$ – обобщенные коэффициенты Кристоффеля связности ∇ относительно этой карты. Докажите, что

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial y^j \partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial x^a} + \frac{\partial x^b}{\partial y^j}\frac{\partial x^c}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\Gamma^a_{bc} \tag{2.2}$$

Указание: используйте определение обобщенных коэффициентов Кристоффеля и формулы (1.21), (1.27).

Сравнивая (2.2) и тензорный закон (1.37), мы видим, что обобщенные коэффициенты Кристоффеля, вообще говоря, не определяют тензорное поле типа (2,1) на многообразии из-за присутствия первой группы членов. Тем не менее, в дифференциальной геометрии принято говорить, что эта совокупность определяет на многообразии M полевой объект не тензорного характера.

Вернемся к рассмотрению формулы (2.1). Из этой формулы следует, что векторное поле $\nabla_X Y$ в каждой точке $p \in M$ зависит лишь от значения поля X в этой точке, но не зависит от значения этого поля в окрестности точки p. Для векторного поля Y это не так. Сие обстоятельство позволяет определить для любого касательного вектора $\xi \in T_p(M)$ понятие ковариантной производной векторного поля Y в направлении вектора ξ. А именно, в силу теоремы 1.3 существует векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$, такое что $X_p = \xi$. Тогда положим по определению

$$(\nabla_\xi Y)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

Так как векторное поле зависит только от значения X в точке p и не зависит от его значений в окрестности этой точки, наше определение корректно в смысле независимости от выбора векторного поля X. Касательный вектор $(\nabla_\xi Y)_p \in T_p(M)$ называется *ковариантной производной векторного поля Y в направлении вектора ξ.*

Пусть дана гладкая кривая $\gamma : I \to M$. В каждой своей точке она задает касательный вектор как класс соприкасающихся с ней путей. Если фиксировать карту (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, то кривая γ будет задаваться с помощью параметрических уравнений (см. § 1.5.)

$$\begin{array}{l} x^1 = x^1(\tau) \\ \ldots \\ x^n = x^n(\tau) \end{array}$$

Здесь мы поменяли обозначение параметра, так как буква t нам понадобится для другого. Мы уже умеем выражать касательный вектор в точке, соответствующей значению параметра $\tau = 0$ через параметрические уравнения. Будем обозначать этот вектор через $\dot{\gamma}(0)$. Тогда

$$\dot{\gamma}(0) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} x^i(\tau) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(0)}$$

Рассмотрим теперь точку со значением параметра $\tau = t$, где t – некоторое фиксированное число, такое что точка $\gamma(t) \subset U$. Тогда касательный вектор в этой точке будет иметь вид

$$\dot{\gamma}(t) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=t} x^i(\tau) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)} \tag{2.3}$$

Итак, если мы возьмем произвольное векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$, то в каждой точке $p \in Im\,\gamma$ кривой γ определен касательный вектор $(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y)_p$.

Если в каждой точке p кривой γ касательный вектор $(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y)_p = 0$, то векторное поле Y называется *параллельным вдоль кривой* γ.

Теорема 2.1. *Векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$ параллельно вдоль кривой γ тогда и только тогда, когда в каждой локальной карте верны тождества*

$$\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}Y^j = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть (U, φ) – локальная карта на M. Рассмотрим кривую $\gamma : I \to M$. Не ограничивая общности предположим, что $Im\,\gamma \in U$. Из формулы (2.3) следует, что для каждого $t \in I$ касательный вектор $\dot{\gamma}(t)$ имеет в натуральном базисе карты (U, φ) координаты

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right).$$

Пусть $Y \in \mathfrak{X}(M)$ параллельно вдоль кривой γ. Так как по определению $(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y)_{\gamma(t)} = (\nabla_X Y)_{\gamma(t)}$, где $X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$, то из формулы (2.1) получим

$$\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\left(\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}Y^j\frac{dx^i}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

В силу линейной независимости векторных полей $\frac{\partial}{\partial x^k}$ натурального базис, получим (2.4). □

Замечание 2.1. Из формулы (2.4) следует, что в критерии параллельности по существу участвуют только касательные векторы сужения поля Y на кривую γ, поэтому можно просто говорить о параллельности семейства $\{Y(t)\}$ касательных векторов вдоль кривой γ.

Пусть $\gamma : I \to M$ – некоторая кривая, $\alpha, \beta \in I$ – некоторые вещественные числа, $\{Y(t)\}$ – параллельное семейство векторов вдоль кривой γ, $p = \gamma(\alpha)$, $q = \gamma(\beta)$. Тогда вектор $Y_q = Y(\beta)$ называется *полученным из вектора $Y_p = Y(\alpha)$ в результате параллельного переноса вдоль кривой* γ и обозначается $Y_q = \tau_{pq}Y_A$. Иначе говоря, вектор Y_q получается в результате параллельного переноса из вектора Y_p, если эти векторы можно включить в семейство векторов, параллельных вдоль γ.

Выясним, всегда ли это можно сделать и сколькими способами. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.4). Это система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Из курса дифференциальных уравнений известно, что эта система имеет единственное решение при любых начальных условиях, то есть система

$$\begin{cases} \frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}Y^j = 0 \\ Y^k(0) = Y^k_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

где $(Y_0^1, \ldots, Y_0^n)$ – произвольный набор вещественных чисел, имеет единственное решение. На геометрическом языке это означает, что любой вектор в любой точке кривой γ может быть параллельно перенесен и при том только единственным способом в любую другую точку этой кривой. Более того, из линейности системы (2.5) следует, что оператор

$$\tau_{pq} : T_p(M) \to T_q(M)$$

параллельного переноса вдоль кривой γ является линейным оператором. Кроме того, очевидно, что существует обратный оператор

$$(\tau_{pq})^{-1} = \tau_{qp}.$$

Тем самым доказана

Теорема 2.2. *Оператор $\tau_{pq} : T_p(M) \to T_q(M)$ параллельного переноса вдоль γ является изоморфизмом касательных пространств в соответствующих точках.* □

Замечание 2.2. Заметим, что $\tau_{pp} : T_p(M) \to T_p(M)$ не является тождественным изоморфизмом. Совокупность таких изоморфизмов касательного пространства для всевозможных кривых образует подгруппу группы всех изоморфизмов пространства $T_p(M)$. Эта подгруппа называется *группой голономии* пространства аффинной связности в этой точке.

§2.2. Геодезические линии*.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности, $\gamma : I \to M$ – некоторая гладкая кривая. Вдоль нее естественно определено семейство векторов, а именно, касательных векторов к этой кривой. Обозначим его как и выше $\dot\gamma(t)$.

Кривая γ называется *геодезической*, если семейство $\dot\gamma(t)$ параллельно вдоль γ.

Из формул (2.4) мы сразу получаем

Теорема 2.3. *Кривая $\gamma : I \to M$ является геодезической, если в каждой локальной карте она задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$, такими что*

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0. \square$$

Эти дифференциальные уравнения называются *уравнениями геодезической*.

Уравнения геодезической представляют собой нормальную систему дифференциальных уравнений второго порядка, для которой, как известно, всякая задача Коши локально имеет единственное решение, то есть система

$$\begin{cases} \frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \\ x^i(0) = x^i_0 \\ \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = \dot x^i_0, \end{cases}$$

где $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, $(\dot x_0^1, \ldots, \dot x_0^n)$ – вещественные числа, задающие начальные данные для точки и касательного вектора, имеет единственное решение.

С геометрической точки зрения это означает, что для любой точки $p \in M$ и любого касательного вектора $\xi \in T_p(M)$ существует единственная геодезическая в некоторой окрестности точки p, проходящая через p и имеющая в этой точке касательный вектор, совпадающий с вектором ξ.

Задача 2.2. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство E^n и зададим связность следующим образом: $\{\Gamma^k_{ij} = 0\}$. Докажите, что геодезическими в этом случае являются прямые и только они.

Замечание 2.3. При перепараметризации геодезической получим, вообще говоря, не геодезическую. Оказывается, что понятие геодезической линии существенно зависит от выбора ее параметризации, а именно, при переходе к новому параметру мы вообще говоря уже не получаем геодезическую.

Теорема 2.4. *Геодезическая линия допускает лишь линейную перепараметризацию.*

Доказательство. Пусть $\gamma : I \to M$ – геодезическая линия на многообразии M, которая в некоторой локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда по теореме 2.3 эти функции должны быть решением уравнений

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{2.6}$$

Сделаем замену параметра $t = t(s)$ кривой γ, где $t(s)$ – гладкая функция, для которой существует обратная гладкая функция $s = s(t)$. Тогда получим новую кривую (правда с тем же образом в многообразии M) $\tilde\gamma : \tilde I \to M$, которая задается уравнениями

$$x^i = x^i(t(s)).$$

Допустим, что кривая $\tilde{\gamma}$ также является геодезической. Тогда

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0. \tag{2.7}$$

По теореме о дифференцировании сложной функции имеем

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds}$$
$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

Подставим эти соотношения в (2.7):

$$\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = 0$$

С учетом (2.6) получим

$$\frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = 0.$$

Так как кривая отлична от точки, $\frac{dx^i}{dt} \neq 0$, а значит, $\frac{d^2t}{ds^2} = 0$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим, что $t = cs + c_1$, где c, c_1 – произвольные константы. Итак, мы получили, что $t(s) = cs + c_1$ – линейная функция.

Обратное очевидно. Нужно рассмотреть линейную перепараметризацию и убедиться, что параметрические уравнения кривой $\tilde{\gamma}$ удовлетворяют уравнениям (2.7) при условии, что параметрические уравнения γ удовлетворяют уравнениям (2.6). Проведите подробные рассуждения самостоятельно. □

§2.3. Геометрический смысл ковариантного дифференцирования.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности. Кривую $\phi : I \to M$ назовем *интегральной кривой векторного поля* $X \in \mathfrak{X}(M)$, если касательный вектор в каждой точке этой кривой совпадает с вектором векторного поля X в этой точке, то есть в каждой локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$, в которой кривая ϕ задана параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$ имеем

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=t} x^i(\tau)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi(t)} = X_{\phi(t)}.$$

Теорема 2.5. *Пусть $p \in M$ – произвольная фиксированная точка, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, такие что $X_p \neq 0$. Обозначим через $\phi(t)$ интегральную кривую векторного поля X, причем $\phi(0) = p$. Обозначим через τ_t оператор параллельного переноса из точки $p = \phi(0)$ в точку $\phi(t)$ вдоль кривой ϕ. Тогда*

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}Y_{\phi(t)} - Y_p\right). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\phi : I \to M$, $\phi(0) = p$. Фиксируем $t \in I$ и рассмотрим вектор $Y_t \equiv Y_{\phi(t)}$. С помощью параллельного переноса τ_t^{-1} перенесем этот вектор в точку p и обозначим его Z_0, то есть

$$Z_0 = \tau_t^{-1}Y_t.$$

В процессе параллельного переноса у нас появилось поле параллельных векторов вдоль кривой $\phi(t)$. Обозначим это поле через $Z_s = \tau_s Z_0$. Так как параллельному переносу подвергался вектор Y_t, то очевидно, что

$$Z_t = Y_t.$$

Фиксируем локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки p. Обозначим как обычно через $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ натуральный базис модуля $\mathfrak{X}(U)$. Тогда полученное поле векторов Z и исходное поле векторов Y можно разложить по этому базису в каждой точке кривой ϕ:

$$Y_s = Y(s)^i\frac{\partial}{\partial x^i}; \quad Z_s = Z(s)^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

причем $Y(t)^i = Z(t)^i$, $i = 1, \dots, n$, так как $Y_t = Z_t$. Так как поле Z_s параллельно вдоль кривой $\phi(t)$, то оно удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dZ^i}{ds} = -\Gamma^i_{jk}Z^k(s)\frac{dx^i}{ds},\ i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим функцию $Z^k(s)$, $k = 1, \dots, n$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует $t^* \in (0, t)$, такое что

$$Z^k(t) - Z^k(0) = \left.\frac{dZ^k}{ds}\right|_{t^*} t.$$

С учетом полученных формул и введенных обозначений преобразуем k-ю координату вектора, стоящего в правой части формулы (2.8)

$$\frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}Y_t^k - Y_0^k\right) = \frac{1}{t}\left(Z^k(0) - Y^k(0)\right) = \frac{1}{t}\left(Z^k(t) - \left.\frac{dZ^k}{ds}\right|_{t^*} t - Y^k(0)\right) = \frac{1}{t}\left(-\left.\frac{dZ^k}{ds}\right|_{t^*} t + Y^k(t) - Y^k(0)\right) =$$
$$-\left.\frac{dZ^k}{ds}\right|_{t^*} + \frac{1}{t}\left(Y^k(t) - Y^k(0)\right) = \Gamma^k_{ij}(t^*)\left.\frac{dx^i}{ds}\right|_{s=t^*} Z^j(t^*) + \frac{1}{t}\left(Y^k(t) -^k (0)\right).$$

Итак, мы получаем

$$\frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}Y_t^k - Y_0^k\right) = \Gamma^k_{ij}(t^*)\left.\frac{dx^i}{ds}\right|_{s=t^*} Z^j(t^*) + \frac{1}{t}\left(Y^k(t) - Y^k(0)\right)$$

Переходя к пределу при $t \to 0$ (а значит, и $t^* \to 0$), получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}Y_t^k - Y_0^k\right) = \Gamma^k_{ij}(p)\left.\frac{dx^i}{ds}\right|_{s=0} Y^j(p) + \left.\frac{dY^k}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\right)\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\right)(p)X^i(p) =$$
$$(\nabla_X Y)^k_p,\ k = 1, \ldots, n$$

Так как у векторов совпадают все соответствующие координаты, то они совпадают сами и мы получаем формулу (2.8). □

§2.4. Параллельный перенос произвольных тензоров вдоль кривой. Ковариантное дифференцирование тензорных полей гладкого многообразия.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности, $\gamma : I \to M$ – кривая, $\gamma(0) = p \in M$. Пусть $u \in T_p^*(M)$ – некоторый ковектор в точке p. Пусть q – произвольная точка на кривой γ. Рассмотрим оператор параллельного переноса

$$\tau_{pq} : T_p(M) \to T_q(M)$$

векторов вдоль кривой γ. Определим отображение $\tilde{u} : T_q(M) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{u}(\xi) = u(\tau_{qp}\xi) \equiv u(\tau_{pq}^{-1}\xi),$$

где $\xi \in T_q(M)$ – произвольный касательный вектор.

Задача 2.3. Докажите, что отображение $\tilde{u}$ будет $\mathbb{R}$-линейным.

Таким образом, мы определили отображение

$$\tau_{pq} : T_p^*(M) \to T_q^*(M),$$

сопоставляющее каждому ковектору u касательного пространства $T_p(M)$ ковектор $\tilde{u}$, определенный на касательном пространстве $T_q(M)$. Это отображение называется *оператором параллельного переноса ковекторов* из точки p в точку q вдоль кривой γ. Мы будем обозначать его также через τ_{pq}.

Задача 2.4. Докажите, что параллельный перенос ковекторов является линейным отображением, а значит изоморфизмом векторных пространств $T_p^*(M)$ и $T_q^*(M)$.

Пусть теперь t – произвольный тензор типа (r, s) в точке $p \in M$, то есть $\mathbb{R}$-линейное по каждому аргументу отображение

$$t : \underbrace{T_p(M) \times \ldots \times T_p(M)}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{T_p^*(M) \times \ldots \times T_p^*(M)}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R}.$$

Определим отображение

$$\tilde{t} : \underbrace{T_q(M) \times \ldots \times T_q(M)}_{r\,\text{раз}} \times \underbrace{T_q^*(M) \times \ldots \times T_q^*(M)}_{s\,\text{раз}} \to \mathbb{R}$$

по формуле

$$\tilde{t}(\xi_1, \ldots, \xi_r, u^1, \ldots, u^s) = t(\tau_{qp}\xi_1, \ldots, \tau_{qp}\xi_r, \tau_{qp}u^1, \ldots, \tau_{qp}u^s),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_r \in T_q(M)$, $u^1, \ldots, u^s \in T_q^*(M)$.

Аналогично случаю ковекторов доказывается, что отображение $\tilde{t}$ $\mathbb{R}$-линейно по каждому аргументу, то есть является тензором типа (r,s) на векторном пространстве $T_q(M)$. Мы будем обозначать его через $\tau_{pq}t$ и называть *результатом параллельного переноса тензора* t из точки p в точку q. Тем самым построен оператор

$$\tau_{pq} : \mathfrak{T}^s_r(T_p(M)) \to \mathfrak{T}^s_r(T_q(M)).$$

Он называется *оператором параллельного переноса тензоров* из точки p в точку q вдоль кривой γ.

Из определений операций с тензорами и определения оператора τ_{pq} непосредственно следует (проведите рассуждения самостоятельно)

Теорема 2.6. *Оператор $\tau_{pq} : \mathfrak{T}^s_r(T_p(M)) \to \mathfrak{T}^s_r(T_q(M))$ параллельного переноса является изоморфизмом тензорных алгебр многообразия M в соответствующих точках, перестановочным со свертками, то есть имеют место свойства*

1. $\tau_{pq}(t_1 + t_2) = \tau_{pq}t_1 + \tau_{pq}t_2$;
2. $\tau_{pq}(\lambda t) = \lambda \tau_{pq}t,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\tau_{pq}(t_1 \otimes t_2) = \tau_{pq}t_1 \otimes \tau_{pq}t_2$;
4. $\tau_{pq} \circ C^{(i)}_{(j)} = C^{(i)}_{(j)} \circ \tau_{pq}$. $\square$

Эта теорема позволяет ввести понятие ковариантной производной для произвольного тензорного поля.

Пусть T – тензорное поле типа (r,s) на гладком n-мерном многообразии M, $X \in \mathfrak{X}(M)$ – векторное поле без особенностей, то есть $X_p \neq 0$ для любой точки $p \in M$. Определим оператор

$$\nabla_X : \mathfrak{T}^s_r(M) \to \mathfrak{T}^s_r(M),$$

положив

$$(\nabla_X T)_p = \lim_{t\to 0} \left(\tau_t^{-1} T_{\phi(t)} - T_p\right),$$

где $\phi(t)$ – интегральная кривая векторного поля X, $\phi(0) = p$, $p \in M$ – произвольная точка M, τ_t – параллельный перенос из точки p в точку $\phi(t)$ вдоль кривой $\phi(t)$. Таким образом, мы получим тензорное поле типа (r,s) на многообразии M, которое называется *ковариантной производной тензорного поля T в направлении векторного поля X*. Оператор ∇_X называется *оператором ковариантного дифференцирования тензорной алгебры* многообразия M.

Теорема 2.7. *Оператор ковариантного дифференцирования тензорной алгебры гладкого многообразия обладает следующими свойствами:*

1. $\nabla_X(T_1 + T_2) = \nabla_X T_1 + \nabla_X T_2$;
2. $\nabla_X(\lambda T) = \lambda \nabla_X T,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$ – *правило Лейбница;*
4. $C^{(i)}_{(j)} \circ \nabla_X = \nabla_X \circ C^{(i)}_{(j)}$.

Иначе говоря, оператор ковариантного дифференцирования является оператором дифференцирования алгебры, перестановочным со свертками.

Доказательство. Свойства 1,2,4 доказываются аналогичным образом. Докажем, например, свойство 1. По определению оператора ∇_X имеем

$$\nabla_X(T_1+T_2)_p = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1+T_2)_{\phi(t)} - (T_1+T_2)_p\right) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} + \tau_t^{-1}(T_2)_{\phi(t)} - (T_1)_p - (T_2)_p\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} - (T_1)_p\right) + \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_2)_{\phi(t)} - (T_2)_p\right) = (\nabla_X T_1)_p + (\nabla_X T_2)_p.$$

Так как это верно для любой точки $p \in M$, то мы доказали первое равенство.

Докажем свойство 3. Имеем

$$(\nabla_X(T_1\otimes T_2))_p = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1\otimes T_2)_{\phi(t)} - (T_1\otimes T_2)_p\right) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} \otimes \tau_t^{-1}(T_2)_{\phi(t)} - (T_1)_p \otimes (T_2)_p \pm\right.$$
$$\left.\pm \tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} \otimes (T_2)_p\right) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} \otimes \left(\tau_t^{-1}(T_2)_{\phi(t)} - (T_2)_p\right)\right) + \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left(\left(\tau_t^{-1}(T_1)_{\phi(t)} - (T_1)_p\right) \otimes (T_2)_p\right) =$$
$$= (T_1)_p \otimes (\nabla_X T_2)_p + (\nabla_X T_1)_p \otimes (T_2)_p.$$

Так как это верно для любой точки $p \in M$, то мы доказали третье равенство. $\square$

Замечание 2.4. Дополним свойства оператора ∇_X еще одним, которое определит ковариантный дифференциал функции. Положим по определению

$$\nabla_X f = X(f),\ f \in C^\infty(M).$$

Теперь используя теорему 2.7, мы можем вычислить ковариантную производную любого тензорного поля.

Пример 2.1. Рассмотрим 1-форму ω. Тогда ее ковариантная производная $\nabla_X(\omega)$ также является 1-формой (по определению оператора ∇_X). Получим формулу для вычисления значения 1-формы $\nabla_X(\omega)$ на произвольном векторном поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$ в инвариантной форме (безындексной) и в индексной форме (в локальной карте).

Сначала получим выражение функции $\omega(Y)$ с помощью тензорных операций (см. § 1.12.). Разложим векторное поле Y по локальному базису $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ и воспользуемся определением компонент тензорного поля:

$$\omega(Y) = \omega(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = Y^i \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}) = Y^i \omega_i = (\omega \otimes Y)^i_i = C^{(1)}_{(1)}(\omega \otimes Y).$$

Итак,

$$\omega(Y) = C^{(1)}_{(1)}(\omega \otimes Y) \tag{2.9}$$

Применим оператор ∇_X к обеим частям равенства (2.9) и учтем теорему 2.7 (перестановочность ∇_X со сверткой и правило Лейбница):

$$\nabla_X(\omega(Y)) = C^{(1)}_{(1)}(\nabla_X(\omega) \otimes Y + \omega \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\omega)Y + \omega(\nabla_X Y)$$

Здесь через $\nabla_X(\omega)Y$ обозначено действие 1-формы $\nabla_X(\omega)$ на векторном поле Y. Наконец, используя замечание 2.4, в безындексном (инвариантном) виде мы получаем следующую формулу

$$\nabla_X(\omega)Y = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

Фиксируем теперь локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и воспользуемся формулами (2.1), (1.19):

$$\nabla_X(\omega)Y = X(\omega_i Y^i) - \omega\left(\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\right)X^i \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}X^j Y^i + \omega_i \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j - \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\right)X^i \omega_k =$$
$$= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}X^j Y^i - \Gamma^k_{ij}Y^j X^i \omega_k \tag{2.10}$$

Слагаемые $\omega_i \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j - \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}X^i \omega_k$ взаимно уничтожились. Чтобы увидеть это, замените индексы суммирования в первом слагаемом: $i \to k$, $j \to i$. Итак, формула для вычисления $\nabla_X(\omega)Y$ в локальной карте имеет вид

$$\nabla_X(\omega)Y = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}\omega_k\right)X^i Y^j. \tag{2.11}$$

Задача 2.5. Обобщите результат примера 2.1 на случай тензорных полей T типа $(r, 0)$.

Ответ: $\nabla_X(T)(X_1, \dots, X_r) = X(T(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r T(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_r)$.

Задача 2.6. Пусть J – тензорное поле типа (1,1) на гладком многообразии M, то есть эндоморфизм модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$. Докажите, что

$$\nabla_X(J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.12}$$

Получите формулу для вычисления $\nabla_X(J)Y$ в локальной карте. Заметим, что в формуле (2.12) оператор Кошуля ∇_X и тензорное поле J типа (1,1) могут рассматриваться как отображения модуля гладких векторных полей, следовательно, формула (2.12) может быть записана в виде

$$\nabla_X J = \nabla_X \circ J - J \circ \nabla_X.$$

Ответ: $\nabla_X(J)Y = \left(\frac{\partial J^k_j}{\partial x^i} + \Gamma^k_{i\ell}J^\ell_j - \Gamma^\ell_{ij}J^k_\ell\right)X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Задача 2.7. Докажите, что $\nabla_X id = 0$, где id – тождественный эндоморфизм модуля векторных полей.

Задача 2.8. Пусть на пространстве аффинной связности M дано тензорное поле T типа (2,1), которое рассматривается как отображение вида $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Докажите, что

$$\nabla_X(T)(Y, Z) = \nabla_X(T(Y, Z)) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z).$$

Покажите, что в локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ имеет место равенство

$$\nabla_X(T)(Y, Z) = \left(\frac{\partial T^i_{k\ell}}{\partial x^j} + T^m_{k\ell}\Gamma^i_{jm} - T^i_{m\ell}\Gamma^m_{jk} - T^i_{km}\Gamma^m_{j\ell}\right)X^j Y^k Z^\ell \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.13}$$

Задача 2.9. Обобщите результат предыдущей задачи на тензорные поля T типа $(r,1)$.

Ответ: $\nabla_X(T)(X_1,\ldots,X_r) = \nabla_X(T(X_1,\ldots,X_r)) - \sum_{i=1}^r T(X_1,\ldots,\nabla_X X_i,\ldots,X_r)$.

Пример 2.2. Пусть на пространстве аффинной связности M задан эндоморфизм J, удовлетворяющий условию

$$J\circ J = -id. \tag{2.14}$$

Он называется *почти комплексной структурой* на многообразии M. Известно, что необходимым условием существования почти комплексной структуры на многообразии является его четномерность и ориентируемость. Поэтому мы обозначим размерность многообразия M через $2n$.

Запишем равенство (2.14) в виде $J\circ J(Y) = -Y$ и применим к нему оператор ∇_X: Применим оператор ∇_X к равенству :

$$\nabla_X(J\circ J(Y)) = -\nabla_X Y. \tag{2.15}$$

Как обычно, выразим композицию $J\circ J(Y)$ через тензорные операции:

$$J\circ J(Y) = J(J(Y^i\tfrac{\partial}{\partial x^i})) = Y^i J(J_i^j\tfrac{\partial}{\partial x^j}) = Y^i J_i^j J_j^k\tfrac{\partial}{\partial x^k} = (J\otimes J\otimes Y)^{jki}_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x^k} = \left(C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes J\otimes Y)\right)^k\tfrac{\partial}{\partial x^k} = \\ = C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes J\otimes Y)$$

Итак, мы получили

$$J\circ J(Y) = C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes J\otimes Y)$$

Вычислим ковариантную производную этого выражения:

$$\nabla_X(J\circ J(Y)) = \nabla_X(C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes J\otimes Y)) = C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(\nabla_X(J)\otimes J\otimes Y) + C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes\nabla_X(J)\otimes Y)+ \\ +C^{(1)(3)}_{(2)(1)}(J\otimes J\otimes\nabla_X Y) = \nabla_X(J)\circ J(Y) + J\circ\nabla_X(J)(Y) + J\circ J(\nabla_X Y) = \\ = \nabla_X(J)\circ J(Y) + J\circ\nabla_X(J)(Y) - \nabla_X Y$$

Подставляя полученный результат в (2.15), имеем

$$\nabla_X(J)(JY) + J\nabla_X(J)Y = 0$$

§2.5. Ковариантный дифференциал тензорных полей.

Пусть (M,∇) – пространство аффинной связности. Определим отображение

$$\nabla : \mathfrak{T}^s_r(M) \to \mathfrak{T}^s_{r+1}(M)$$

по формуле

$$(\nabla T)(X_1,\ldots,X_r,\omega^1,\ldots,\omega^s,X) = (\nabla_X T)(X_1,\ldots,X_r,\omega^1,\ldots,\omega^s), \tag{2.16}$$

где $X_1,\ldots,X_r,X\in\mathfrak{X}(M)$, $\omega^1,\ldots,\omega^s\in\mathfrak{X}^*(M)$. В силу свойства $C^\infty(M)$-линейности оператора ∇_X по X, введенное определение корректно, то есть ∇T является $C^\infty(M)$-линейным отображением по каждому аргументу, то есть является тензорным полем на M. Тензорное поле ∇T называется *ковариантным дифференциалом* тензорного поля T.

В компонентах формула (2.16) примет вид

$$(\nabla T)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}},dx^{j_1},\ldots,dx^{j_s},X^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = (\nabla_X T)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}},dx^{j_1},\ldots,dx^{j_s}\right)$$

или, используя определение компонент

$$(\nabla T)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r k}X^k = (\nabla_X T)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \tag{2.17}$$

Обычно компоненты ковариантного дифференциала обозначают следующим образом:

$$(\nabla T)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r k} \equiv T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}$$

Запятой (или каким-либо другим знаком) отделяют индекс, отвечающий за векторное поле X из оператора ∇_X. С учетом этой договоренности соотношение (2.17) примет вид

$$T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}X^k = (\nabla_X T)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \tag{2.18}$$

Пример 2.3. Рассмотрим тождество, полученное в примере 2.2:

$$\nabla_X(J)(JY) + J\nabla_X(J)Y = 0$$

и запишем его в компонентах. В левой части рассматриваемого тождества записано векторное поле. Оно будет нулевым тогда и только тогда, когда все его координаты нулевые функции, то есть

$$(\nabla_X(J)(JY))^i + (J\nabla_X(J)Y)^i = 0.$$

Как мы знаем, если на векторное поле X подействовал эндоморфизм L, то координаты получившегося векторного поля вычисляются по формуле $(L(X))^i = L^i_j X^j$, где L^i_j – матрица эндоморфизма L или, что эквивалентно, компоненты эндоморфизма L, рассматриваемого как тензорное поле типа (1,1). Применим эту формулу в нашем случае:

$$(\nabla_X(J))^i_j (JY)^j + J^i_j (\nabla_X(J)Y)^j = 0$$

И еще раз применим ту же формулу:

$$(\nabla_X(J))^i_j J^j_k Y^k + J^i_j (\nabla_X(J))^j_k Y^k = 0.$$

Теперь воспользуемся формулой (2.18):

$$J^i_{j,\ell} X^\ell J^j_k Y^k + J^i_j J^j_{k,\ell} X^\ell Y^k = 0$$

Так как полученная формула верна для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, то она верна, в частности, для векторных полей натурального базиса:

$$J^i_{j,\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right)^\ell J^j_k \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^k + J^i_j J^j_{k,\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right)^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^k = 0$$

Так как все компоненты мы считаем относительно натурального базиса (другого у нас пока еще и нет), получаем, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right)^\ell = \delta^\ell_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^k = \delta^k_m$. Тогда окончательно получим

$$J^i_{j,p} J^j_m + J^i_j J^j_{m,p} = 0. \tag{2.19}$$

В дальнейшем мы не будем производить подстановку векторных полей натурального базиса, а сразу будем писать результат. Он получается, если убрать координаты произвольных векторных полей. □

Задача 2.10. Пусть на пространстве M аффинной связности заданы три тензорных поля (Φ, η, ξ), где Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, ξ – векторное поле, η – 1-форма, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{array}{ll} 1)\, \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; & 2)\, \eta(\xi) = 1; \\ 3)\, \Phi(\xi) = 0; & 4)\, \eta \circ \Phi = 0. \end{array}$$

Такая тройка тензорных полей называется *почти контактной структурой* на многообразии M. Примените оператор ∇_X к каждому из условий, определяющих почти контактную структуру и запишите результат в инвариантном виде и в компонентах, используя компоненты ковариантных дифференциалов (то есть получите формулы аналогичные (2.19)).

Ответ:

$$\begin{array}{ll} \nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi\nabla_X(\Phi)Y = (\nabla_X(\eta)Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi; & \Phi^i_{j,k}\Phi^j_\ell + \Phi^i_j\Phi^j_{\ell,k} = \xi^i\eta_{\ell,k} + \xi^i_{,k}\eta_\ell; \\ \nabla_X(\eta)\xi + \eta(\nabla_X\xi) = 0; & \eta_{i,j}\xi^i + \eta_i\xi^i_{,j} = 0; \\ \nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_X\xi) = 0; & \Phi^i_{j,k}\xi^j + \Phi^i_j\xi^j_{,k} = 0; \\ \nabla_X(\eta)(\Phi Y) + \eta(\nabla_X(\Phi)Y) = 0; & \eta_{i,j}\Phi^i_k + \eta_i\Phi^i_{k,j} = 0. \end{array}$$

Задача 2.11. Запишите инвариантные соотношения из задачи 2.10 в индексной форме, используя обобщенные коэффициенты Кристоффеля.

Ответ:

1) $\left(\frac{\partial\Phi^s_j}{\partial x^i} + \Gamma^s_{i\ell}\Phi^\ell_j - \Gamma^\ell_{ij}\Phi^s_\ell\right)\Phi^j_p + \Phi^s_k\left(\frac{\partial\Phi^k_p}{\partial x^i} + \Gamma^k_{i\ell}\Phi^\ell_p - \Gamma^\ell_{ip}\Phi^k_\ell\right) = \left(\frac{\partial\eta_p}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ip}\eta_k\right)\xi^s + \eta_p\left(\frac{\partial\xi^s}{\partial x^i} + \Gamma^s_{ik}\xi^k\right)$

2) $\frac{\partial\eta_i}{\partial x^j}\xi^i + \eta_i\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j} = 0$

3) $\left(\frac{\partial\Phi^k_j}{\partial x^i} + \Gamma^k_{i\ell}\Phi^\ell_j\right)\xi^j + \Phi^k_j\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i} = 0$

4) $\frac{\partial\eta_j}{\partial x^i}\Phi^j_p + \eta_k\frac{\partial\Phi^k_p}{\partial x^i} - \eta_k\Gamma^\ell_{ip}\Phi^k_\ell = 0$

§2.6. Тензоры кручения и кривизны связности.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности. *Оператором кручения* связности ∇ называется отображение $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, определенное формулой

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{2.20}$$

Оператором кривизны связности ∇ называется отображение $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, определенное формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.21}$$

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 2.8. *Операторы S и R $C^\infty(M)$-линейны по каждому аргументу.*

Доказательство. Докажем линейность оператора кручения по первому аргументу (остальное доказывается аналогично), то есть

$$S(\alpha X' + \beta X'', Y) = \alpha S(X', Y) + \beta S(X'', Y),\ X', X'', Y \in \mathfrak{X}(M),\ \alpha, \beta \in C^\infty(M).$$

Сначала заметим, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$[\alpha X, Y](f) = \alpha X(Y(f)) - Y((\alpha X)(f)) = \alpha X(Y(f)) - Y(\alpha)X(f) - \alpha Y(X(f)) = \alpha[X, Y] - Y(\alpha)X(f).$$

Значит,

$$[\alpha X, Y] = \alpha[X, Y] - Y(\alpha)X \tag{2.22}$$

С учетом этой формулы и определения оператора ковариантного дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} S(\alpha X' + \beta X'', Y) = \nabla_{\alpha X' + \beta X''} Y - \nabla_Y(\alpha X' + \beta X'') - [\alpha X' + \beta X'', Y] = \alpha \nabla_{X'} Y + \beta \nabla_{X''} Y - Y(\alpha)X' - \alpha \nabla_Y X' - \\ - Y(\beta)X'' - \beta \nabla_Y X'' - \alpha[X', Y] + Y(\alpha)X' - \beta[X'', Y] + Y(\beta)X'' = \alpha S(X', Y) + \beta S(X'', Y). \end{aligned}$$

□

Следствие 2.1. Операторы кручения и кривизны связности ∇ определяют тензорные поля типов (2,1) и (3,1) соответственно. Они называются *тензорами кручения и кривизны связности.*

Эти тензоры обозначаются теми же буквами, что и соответствующие операторы. А именно, оператор $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ порождает отображение $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ по формуле

$$S(X, Y, \omega) = \omega(S(X, Y)),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \omega \in \mathfrak{X}^*(M).$$

Очевидно, что определенное отображение S линейно по каждому аргументу, то есть является тензорным полем типа (2,1).

Аналогично, оператор кривизны $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ порождает отображение $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ по формуле

$$R(Z, X, Y, \omega) = \omega(R(X, Y)Z),\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),\ \omega \in \mathfrak{X}^*(M). \tag{2.23}$$

Очевидно, что определенное отображение линейно по каждому аргументу, то есть является тензором типа (3,1). Обратите внимание, что порядок векторных полей – аргументов тензора кривизны – изменен.

Замечание 2.5. Легко видеть, что задание оператора кривизны эквивалентно заданию тензора кривизны. Поэтому в литературе между ними обычно не делают различия и называют оператор кривизны тензором кривизны. Аналогичное замечание относится и к тензору кручения.

§2.7. Координатное задание тензоров кручения и кривизны связности.

7.1. Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности, (U, φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Как мы знаем, связность ∇ в этой карте определяется заданием обобщенных коэффициентов Кристоффеля $\{\Gamma^k_{ij}\}$, где

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Следовательно, компоненты $\{S^i_{ij}\}$ и $\{R^i_{ijk}\}$ тензоров кручения S и кривизны R связности ∇ должны в натуральном базисе также определяться обобщенными коэффициентами Кристоффеля $\{\Gamma^k_{ij}\}$. Наша задача – найти эту зависимость в явном виде.

Теорема 2.9. *В натуральном базисе для компонент $\{S^i_{jk}\}$ тензора кручения S связности ∇ имеем*

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

Доказательство. Напомним, что тензор кручения связности определяется по формуле

$$S(X, Y, \omega) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]).$$

Используя определение компонент тензорного поля, получим

$$S^k_{ij} = S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, dx^k\right) = dx^k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) =$$

Воспользуемся определением обобщенных коэффициентов Кристоффеля и примером 1.28, продолжая цепочку равенств:

$$= dx^k\left(\Gamma^t_{ij}\frac{\partial}{\partial x^t} - \Gamma^t_{ji}\frac{\partial}{\partial x^t}\right) = \Gamma^t_{ij}\delta^k_t - \Gamma^t_{ji}\delta^k_t = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

□

Теорема 2.10. *В натуральном базисе для компонент $\{R^\ell_{kij}\}$ тензора кривизны R имеем*

$$R^\ell_{kij} = \frac{\partial\Gamma^\ell_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^t_{jk}\Gamma^\ell_{it} - \frac{\partial\Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^\ell_{jt} \tag{2.24}$$

Доказательство. Принцип вычисления компонент тензора кривизны R такой же как для тензора кручения S, но расчеты будут более громоздкими из-за наличия двойного ковариантного дифференцирования.

Напомним, что тензор кривизны связности определяется формулой

$$R(Z, X, Y, \omega) = \omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z).$$

Тогда по определению компонент получим

$$R^\ell_{kij} = dx^\ell\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = dx^\ell\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) =$$

Опять благодаря примеру 1.28 последнее слагаемое обнуляется, а для остальных используем определение обобщенных коэффициентов Кристоффеля и правило Лейбница для ковариантного дифференцирования:

$$= dx^\ell\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^t_{jk}\frac{\partial}{\partial x^t}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^t_{ik}\frac{\partial}{\partial x^t}\right)\right) = dx^\ell\left(\frac{\partial\Gamma^t_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma^t_{jk}\Gamma^r_{it}\frac{\partial}{\partial x^r} - \frac{\partial\Gamma^t_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^t} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^r_{jt}\frac{\partial}{\partial x^r}\right) =$$

$$= \frac{\partial\Gamma^t_{jk}}{\partial x^i}\delta^\ell_t + \Gamma^t_{jk}\Gamma^r_{it}\delta^\ell_r - \frac{\partial\Gamma^t_{ik}}{\partial x^j}\delta^\ell_t - \Gamma^t_{ik}\Gamma^r_{jt}\delta^\ell_r = \frac{\partial\Gamma^\ell_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^t_{jk}\Gamma^\ell_{it} - \frac{\partial\Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^\ell_{jt},$$

что и требовалось доказать.

□

7.2. Посмотрим некоторые свойства тензоров кручения и кривизны. Первое свойство тензора кривизны достаточно очевидно. Его легко получить как из определения тензора кривизны, так и из формулы (2.24). Мы запишем его в трех видах:

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z; \quad R(Z, X, Y, \omega) = -R(Z, Y, X, \omega); \quad R^k_{ij\ell} = -R^k_{i\ell j}.$$

Это свойство называется *кососимметричностью тензора кривизны по последним двум векторным аргументам.*

Еще одно свойство тензора кривизны верно не для любой связности, а для так называемой *связности без кручения.* Связность ∇ на многообразии M называется *связностью без кручения*, если тензор кручения связности ∇ тождественно равен нулю, то есть $S^i_{jk} = 0$, то есть $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Таким образом, мы получаем

Теорема 2.11. *Связность ∇ является связностью без кручения тогда и только тогда, когда ее обобщенные коэффициенты Кристоффеля симметричны по нижней паре индексов.* □

Теорема 2.12. *Для связности без кручения ∇ имеет место тождество Риччи (также его называют тождеством Бианки, то есть*

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} = 0; \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \tag{2.25}$$

Доказательство. Докажем координатную формул тождества Риччи. Для этого в левую часть тождества Риччи подставим формулу (2.24) и воспользуемся симметричностью обобщенных коэффициентов Кристоффеля. Имеем

$$R^a_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^d} + \Gamma^m_{db}\Gamma^a_{cm} - \Gamma^m_{cb}\Gamma^a_{dm}$$

$$R^a_{cdb} = \frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial x^d} - \frac{\partial \Gamma^a_{dc}}{\partial x^b} + \Gamma^m_{bc}\Gamma^a_{dm} - \Gamma^m_{dc}\Gamma^a_{bm}$$

$$R^a_{dbc} = \frac{\partial \Gamma^a_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma^a_{bd}}{\partial x^c} + \Gamma^m_{cd}\Gamma^a_{bm} - \Gamma^m_{bd}\Gamma^a_{cm}$$

Складывая эти тождества, мы получим нуль.

Перейдем теперь от координатной формы тождества Риччи к инвариантной. Пусть $X = X^c \frac{\partial}{\partial x^c}$, $Y = Y^d \frac{\partial}{\partial x^d}$, $Z = Z^b \frac{\partial}{\partial x^b}$. Воспользуемся определением компонент тензора кривизны.

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, dx^a\right) + R\left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, dx^a\right) + R\left(\frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^c}, dx^a\right) = 0$$

Умножим обе части тождества на X^c, Y^d, Z^b и просуммируем по этим индексам:

$$R(Z, X, Y, dx^a) + R(X, Y, Z, dx^a) + R(Y, Z, X, dx^a) = 0.$$

Воспользуемся выражением тензора кривизны через оператор кривизны (2.23):

$$(R(X, Y)Z)^a + (R(Y, Z)X)^a + (R(Z, X)Y)^a = 0,\ a = 1, \ldots, n.$$

В левой части этого равенства стоят координаты некоторого векторного поля в натуральном базисе. Так как все они равны нулю, то и само векторное поле нулевое, то есть

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Итак, мы получили тождество Риччи в инвариантной форме. Этот прием перехода от координатной записи к инвариантной мы будем использовать и далее. □

§2.8. Тензор аффинной деформации.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности. Пусть на M задана еще одна связность $\tilde{\nabla}$. Рассмотрим отображение

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

заданное формулой

$$T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,\ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 2.13. *Отображение T $C^\infty(M)$-линейно по каждому аргументу, а значит, может быть отождествлено с тензорным полем типа (2,1).*

Доказательство. Докажем линейность по второму аргументу. Линейность по первому аргументу доказывается проще. Имеем по определению оператора ковариантного дифференцирования (см. § 2.1.)

$$T(X, fY' + gY'') = \tilde{\nabla}_X(fY' + gY'') - \nabla_X(fY' + gY'') = X(f)Y' + f\tilde{\nabla}_X Y' + X(g)Y'' + g\tilde{\nabla}_X Y'' - X(f)Y' -$$
$$- f\nabla_X Y' - X(g)Y'' - g\nabla_X Y'' = fT(X, Y') + gT(X, Y''),$$

где $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y', Y'' \in \mathfrak{X}(M)$. Тензорное поле мы будем обозначать той же буквой T и, очевидно, оно будет определяться по формуле

$$T(X, Y, \omega) = \omega(T(X, Y)),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \omega \in \mathfrak{X}^*(M).$$

□

Тензорное поле T называется *тензором аффинной деформации* от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$. Верно и обратное.

Теорема 2.14. *Пусть на гладком многообразии M даны связность ∇ и произвольное тензорное поле T типа (2,1). Тогда отображение $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, определенное формулой*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + T(X, Y),$$

будет оператором ковариантного дифференцирования на многообразии M, то есть связностью.

Доказательство. Нам нужно проверить выполнение трех условий из определения 2.1 аффинной связности. Проверим третье условие. Первые два проверяются аналогично.

Нам нужно доказать, что
$$\tilde{\nabla}_X(fY) = X(f)Y + f\tilde{\nabla}_X Y.$$

Имеем
$$\tilde{\nabla}_X(fY) = \nabla_X(fY) + T(X, fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y + fT(X,Y) = X(f)Y + f\tilde{\nabla}_X Y,\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M).$$

Здесь мы воспользовались свойством (3) для связности ∇ и $C^\infty(M)$-линейностью тензорного поля T. $\square$

Задача 2.12. Докажите, что для любой карты (U, φ) на многообразии M компоненты тензора аффинной деформации T от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ задаются формулой
$$T^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk},$$
где $\{\Gamma^i_{jk}\}$ – обобщенные коэффициенты Кристоффеля связности ∇, а $\{\tilde{\Gamma}^i_{jk}\}$ – обобщенные коэффициенты Кристоффеля связности $\tilde{\nabla}$.

Замечание 2.6. Напомним, что непустое множество $\mathscr{A}$ произвольной природы называется *аффинным пространством* над векторным пространством V, если определено отображение
$$+ : \mathscr{A} \times V \to \mathscr{A},$$
удовлетворяющее двум условиям:
1) для любых $A, B \in \mathscr{A}$ существует единственный вектор $x \in V$, такой что $B = A + x$;
2) для любых $A \in \mathscr{A}$, $x, y \in V$ имеем $(A + x) + y = A + (x + y)$.

Элементы аффинного пространства называются *точками.* Операция + называется *операцией сложения точек и векторов.* Операции, которым удовлетворяет операция + называются *аксиомами аффинного пространства.*

Обозначим множество всех аффинных связностей гладкого многообразия M через $\mathscr{A}$. Мы видели, что множество тензорных полей типа (r, s), в частности, типа (2,1), образует (бесконечномерное) вещественное векторное пространство. Обозначим его через V. Тогда формула $\tilde{\nabla} = \nabla + T$ задает операцию сложения связности и тензорного поля типа (2,1), тем самым превращая множество $\mathscr{A}$ в (бесконечномерное) аффинное пространство. Выполнение аксиом аффинного пространства проверьте самостоятельно.

Задача 2.13. Докажите, что если связности $\tilde{\nabla}$ и ∇ являются связностями без кручения, то их тензор аффинной деформации симметричен, то есть $T(X, Y) = T(Y, X)$.

§2.9. Псевдо-римановы и римановы многообразия.

9.1. Гладкое многообразие M называется *псевдо-римановым*, если на нем фиксировано тензорное поле g типа (2,0), обладающее следующими свойствами:
1) симметричность: $g(X, Y) = g(Y, X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;
2) невырожденность: $g(X, Y) = 0\, \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow X = 0$.

Если условие невырожденности заменить более сильным *условием положительной определенности*: $g(X, X) \geq 0\, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$, причем $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, то многообразие называется *римановым.* Тензорное поле g называется *метрическим тензором* или *(псевдо)-римановой структурой* или *скалярным произведением* или *метрикой* на многообразии M.

Задача 2.14. Докажите, что любое риманово многообразие является псевдо-римановым.

Наряду с обозначением g для метрического тензора, мы часто будем использовать обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

В силу невырожденности (псевдо)-римановой структуры g, матрица (g_{ij}) ее компонент относительно произвольной карты является невырожденной, а значит, существует обратная матрица, которую мы будем обозначать (g^{ij}). Нетрудно проверить, что эта система функций задает тензорное поле типа (0,2) на многообразии M. Оно называется *контравариантным метрическим тензорным полем или контравариантной (псевдо)римановой метрикой.*

С помощью (псевдо)римановой метрики и контравариантной (псевдо)римановой метрики можно ввести операции поднятия и опускания индексов у тензорных полей. Например, опустим первый индекс у тензорного поля t типа (0,3). В результате мы получим тензорное поле T типа (1,2) с компонентами
$$T_i^{jk} = g_{ip} t^{pjk}.$$

Аналогичным образом определяется операция поднятия индекса. Например, поднимем индекс у тензорного поля t типа (2,0). В результате получим тензорное поле T типа (1,1) с компонентами
$$T^i{}_j = g^{ip} t_{pj}.$$

Если дано тензорное поле типа (r,s), где r и s отличны от нуля, то прежде чем поднимать или опускать индексы, нужно договориться об их общей последовательности. Например, тензорное поле t типа (3,2), для которого до этого момента мы писали компоненты в виде $t^{ij}_{k\ell p}$, теперь должны писать так $t^{i}{}_{k}{}^{j}{}_{\ell p}$ или так $t^{ij}{}_{k\ell p}$. Выбор последовательности индексов зависит от конкретного тензорного поля, задачи или эстетических предпочтений исследователя. Допустим, мы выбрали последовательность $t^{i}{}_{k}{}^{j}{}_{\ell p}$. Опустим первый верхний индекс и поднимем последний нижний. Каждый из передвигаемых индексов перемещается строго по вертикали:

$$T_{mk}{}^{j}{}_{\ell}{}^{r} = g_{im}g^{pr}t^{i}{}_{k}{}^{j}{}_{\ell p}$$

Часто в научной литературе тензорные поля с поднятыми (опущенными) индексами обозначают той же буквой, что и исходного тензорное поле. Недоразумений не возникает, так как исходное и полученное тензорные поля имеют разный тип. В этих обозначениях наши примеры примут вид

$$t_{i}{}^{jk} = g_{ip}t^{pjk}; \quad t^{i}{}_{j} = g^{ip}t_{pj}; \quad t_{mk}{}^{j}{}_{\ell}{}^{r} = g_{im}g^{pr}t^{i}{}_{k}{}^{j}{}_{\ell p}.$$

9.2. Докажем основную теорему римановой геометрии.

Теорема 2.15. *(основная теорема римановой геометрии)*

Пусть $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – (псевдо)риманово многообразие. Тогда на нем внутренним образом определена аффинная связность ∇, однозначно характеризующаяся свойствами:
1) ∇ – связность без кручения, то есть $S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;
2) $\nabla_X(g) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, то есть метрический тензор ковариантно постоянен (или, другими словами, параллелен) в этой связности.

Доказательство. Начнем доказательство с единственности, то есть выясним как должна выглядеть связность ∇, удовлетворяющая свойствам, указанным в теореме, если она существует.

Согласно первому условию

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y] \tag{2.26}$$

Рассмотрим второе условие. Нам нужно будет применять оператор ∇_X к тензорному полю g. Для этого выразим значение g на паре произвольных векторных полей $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ через тензорные операции. Как всегда мы сделаем это, переходя к компонентам:

$$g(Y,Z) = g\left(Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Z^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij}Y^iZ^j = (g\otimes Y\otimes Z)^{ij}_{ij} = C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(g\otimes Y\otimes Z)$$

Итак, мы получили

$$g(Y,Z) = C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(g\otimes Y\otimes Z)$$

Применим к этому тождеству оператор ∇_X, учтем, что на функциях $\nabla_X f = X(f)$ и воспользуемся правилом Лейбница:

$$X(g(Y,Z)) = C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(\nabla_X(g)\otimes Y\otimes Z) + C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(g\otimes \nabla_X Y\otimes Z) + C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(g\otimes Y\otimes \nabla_X Z) = \nabla_X(g)(Y,Z) + \\ + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Согласно второму условию из теоремы $\nabla_X(g) = 0$, то есть $\nabla_X(g)(Y,Z) = 0$. Тогда из последнего равенства получим

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

В этом соотношении два раза сделаем циклическую перестановку аргументов $X \to Y \to Z \to X$:

$$\begin{gathered} X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{gathered}$$

Сложим первые два из полученных соотношений, а третье вычтем из них. Тогда с учетом (2.26) получим

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y - [X,Y]) - \\ - g(\nabla_X Z - [X,Z], Y) - g(X, \nabla_Y Z - [Y,Z])$$

Тогда

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \tag{2.27}$$

В силу невырожденности метрического тензора эта формула однозначно определяет векторное поле $\nabla_X Y$. Итак, если требуемая связность существует, то она должна задаваться формулой (2.27).

Докажем существование. Определим отображение $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, сопоставив каждой паре векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ векторное поле $\nabla_X Y$, заданное соотношением (2.27). Прямая проверка показывает, во-первых, что отображение ∇ задано корректно, то есть $\nabla_X Y$ действительно векторное поле, во-вторых, что ∇ является аффинной связностью и, в-третьих, что эта связность удовлетворяет условиям теоремы. □

Задача 2.15. Проведите доказательство существования связности ∇ из теоремы 2.15.

Связность ∇ на псевдо-римановом многообразии, построенная выше, называется *римановой связностью* или *связностью Леви-Чивита.*

Вычислим обобщенные коэффициенты Кристоффеля для связности Леви-Чивита. Пусть (U,φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1,\dots,x^n)$. Подставим в формулу (2.27) $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x^k}$:

$$2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)+$$
$$+g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right],\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right],\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right],\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

Коммутаторы базисных векторных полей обращаются в нуль согласно примеру 1.28. Используя определение коэффициентов Кристоффеля, получим

$$2g\left(\Gamma^{\ell}_{ij}\frac{\partial}{\partial x^\ell},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Воспользуемся линейностью g:

$$2\Gamma^{\ell}_{ij}g_{\ell k}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{2.28}$$

Так как метрический тензор не вырожденный, то для матрицы (g_{ij}) существует обратная матрица (g^{ij}), то есть такая матрица, что $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$. Эта система функций задает тензорное поле типа (0,2). Оно называется *контравариантным метрическим тензором.* Тогда умножим обе части равенств (2.28) на g^{kr} и просуммируем по k:

$$2\Gamma^{\ell}_{ij}g_{\ell k}g^{kr}=g^{kr}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Так как $g^{kr}g_{\ell k}=\delta^r_\ell$, получим

$$\Gamma^{r}_{ij}=\frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{2.29}$$

Набор функций $\{\Gamma^m_{ir}\}$ называется *символами Кристоффеля второго рода* или *символами Кристоффеля римановой связности.*

Задача 2.16. Докажите, что для римановой связности ∇ метрики g имеют место тождества

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-g_{tk}\Gamma^t_{ij}-g_{jt}\Gamma^t_{ik}=0. \tag{2.30}$$

Решение. Так как для римановой связности метрики g имеем $\nabla_X(g)(Y,Z)=0$, получим

$$X(g(Y,Z))-g(\nabla_XY,Z)-g(Y,\nabla_XZ)=0.$$

Подробные вычисления аналогично примеру 2.1 проведите самостоятельно.

Запишем это равенство в координатном виде.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)-g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=0$$

Применяя определение символов Кристоффеля и линейность g, получим требуемое равенство.

□

Задача 2.17. Докажите, что контравариантное метрическое тензорное поле $\{g^{ij}\}$ ковариантно постоянно в римановой связности метрики g.

Решение. Напомним, что контравариантное метрическое тензорное поле $\hat{g}$ – это тензорное поле типа (0,2), матрица $\{g^{ij}\}$ компонент которого является обратной матрицей для компонент $\{g_{ij}\}$ метрического тензора g. Нам нужно доказать, что $\nabla_X(\hat{g})=0$ для любого $X\in\mathfrak{X}(M)$.

Сначала выразим значение ковариантной производной $\nabla_X(\hat{g})$ в произвольной локальной карте (U,φ) с координатами $(x^1,\dots,x^n)$. Рассуждая аналогично примеру 2.1, получим

$$\nabla_X(\hat{g})(\omega,\theta)=X(\hat{g}(\omega,\theta))-\hat{g}(\nabla_X\omega,\theta)-\hat{g}(\omega,\nabla_X\theta),$$

где ω, θ – произвольные 1-формы. Переходим к компонентам и пользуемся формулой (2.11)(чтобы из этой формулы достать компоненты формы $\nabla_X\omega$ нужно учесть равенство $\nabla_X(\omega)Y = (\nabla_X\omega)_j Y^j$):

$$\nabla_X(\hat{g})(\omega,\theta) = X(g^{ij}\omega_i\theta_j) - g^{ij}(\nabla_X\omega)_i\theta_j - g^{ij}\omega_i(\nabla_X\theta)_j = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}X^k\omega_i\theta_j + g^{ij}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}X^k\theta_j + g^{ij}\omega_i\frac{\partial\theta_j}{\partial x^k}X^k -$$

$$- g^{ij}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^\ell} - \Gamma^k_{\ell i}\omega_k\right)X^\ell\theta_j - g^{ij}\omega_i\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial x^\ell} - \Gamma^k_{\ell j}\theta_k\right)X^\ell = \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + g^{\ell j}\Gamma^i_{k\ell} + g^{i\ell}\Gamma^j_{k\ell}\right)X^k\omega_i\theta_j.$$

В последнем равенстве мы привели подобные слагаемые и переобозначили индексы суммирования, чтобы вынести за скобку $X^k\omega_i\theta_j$.

Для доказательства равенства $\nabla_X(\hat{g}) = 0$ нам достаточно показать, что выражение в больших скобках равно нулю. Для этого применим оператор $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ к равенству $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Получим

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\ell}g_{jk} + g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} = 0.$$

Воспользуемся формулой (2.30):

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\ell}g_{jk} + g^{ij}\left(g_{mk}\Gamma^m_{\ell j} + g_{jm}\Gamma^m_{\ell k}\right) = 0.$$

Свернем с g^{kt} и воспользуемся равенством $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\ell}\delta^t_j + g^{ij}\delta^t_m\Gamma^m_{\ell j} + \delta^i_m\Gamma^m_{\ell k}g^{kt} = 0.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial g^{it}}{\partial x^\ell} + g^{ij}\Gamma^t_{\ell j} + g^{kt}\Gamma^i_{\ell k} = 0, \tag{2.31}$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 2.7. Доказать ковариантное постоянство контравариантного метрического тензора можно короче, но при этом мы не получим равенства (2.31), которое представляет самостоятельный интерес.

Контравариантный метрический тензор $\hat{g}$ мы получили, взяв обратную матрицу для компонент метрического тензора g, то есть имеем $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. Запишем это равенство в инвариантном виде с помощью тензорного произведения и свертки: $C^{(1)}_{(2)}(g\otimes\hat{g}) = id$, где id – тождественный эндоморфизм модуля гладких векторных полей, который может быть рассмотрен как тензорное поле типа (1,1). Применим к последнему равенству оператор ∇_X

$$C^{(1)}_{(2)}(\nabla_X(g)\otimes\hat{g} + g\otimes\nabla_X\hat{g}) = 0.$$

Так как метрический тензор ковариантно постоянен в римановой связности, то есть $\nabla_X(g) = 0$, получим

$$C^{(1)}_{(2)}g\otimes\nabla_X\hat{g} = 0.$$

Переведем это равенство обратно в индексный вид: $g_{ij}(\nabla_X\hat{g})^{jk} = 0$ и избавимся от g_{ij} в левой части равенства. Для этого умножим обе части равенства на g^{it} и просуммируем по i. Тогда получим $\delta^t_j(\nabla_X\hat{g})^{jk} = 0$ или $(\nabla_X\hat{g})^{tk} = 0$. Мы получаем, что все компоненты тензорного поля $\nabla_X\hat{g}$ равны нулю, а значит, равно нулю и само тензорное поле $\nabla_X\hat{g}$.

Замечание 2.8. Выше мы получили для римановой связности метрики g следующее тождество (см. (2.28))

$$g_{kj}\Gamma^k_{ir} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}\right)$$

Продифференцируем его оператором $\frac{\partial}{\partial x^c}$.

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^c}\Gamma^k_{ir} + g_{kj}\frac{\partial\Gamma^k_{ir}}{\partial x^c} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{rj}}{\partial x^i\partial x^c} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^r\partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial x^j\partial x^c}\right) \tag{2.32}$$

Пример 2.4. Рассмотрим так называемый *ковариантный тензор Римана-Кристоффеля*. В компонентах он определяется следующим образом:

$$R_{ib,cd} = g_{ia}R^a_{bcd}.$$

В инвариантном виде он будет задаваться формулой

$$R(W,Z,X,Y) = g(W,R(X,Y)Z). \tag{2.33}$$

Ковариантный тензор Римана-Кристоффеля обладает рядом дополнительный свойств симметрии. Сформулируем эти свойства в компонентах (в инвариантный вид перепишите их самостоятельно).

$$1)\, R_{ib,cd} = -R_{ib,dc}; \quad 2)\, R_{ib,cd} = -R_{bi,cd}; \quad 3)\, R_{ib,cd} = R_{cd,ib}.$$

$$R_{ij,k\ell} + R_{ik,\ell j} + R_{i\ell,jk} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0. \tag{2.34}$$

Для доказательства этих свойств преобразуем формулу (2.24), используя формулу (2.32).

$$R_{ib,cd} = g_{ia}R^a_{bcd} = g_{ia}\left(\frac{\partial\Gamma^a_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial\Gamma^a_{cb}}{\partial x^d} + \Gamma^m_{db}\Gamma^a_{cm} - \Gamma^m_{cb}\Gamma^a_{dm}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{bi}}{\partial x^d \partial x^c} + \frac{\partial^2 g_{di}}{\partial x^b \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{db}}{\partial x^i \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{bi}}{\partial x^c \partial x^d} - \frac{\partial^2 g_{ci}}{\partial x^b \partial x^d} + \frac{\partial^2 g_{cb}}{\partial x^i \partial x^d}\right) - \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^c}\Gamma^a_{db} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^d}\Gamma^a_{cb} + g_{ia}\left(\Gamma^m_{db}\Gamma^a_{cm} - \Gamma^m_{cb}\Gamma^a_{dm}\right).$$

В первой скобке два слагаемых взаимно уничтожаются, а вместо первых частных производных g_{ij} подставим их выражения по формуле (2.30).

$$R_{ib,cd} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{di}}{\partial x^b \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{db}}{\partial x^i \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{ci}}{\partial x^b \partial x^d} + \frac{\partial^2 g_{cb}}{\partial x^i \partial x^d}\right) - (g_{ta}\Gamma^t_{ci} + g_{ti}\Gamma^t_{ca})\Gamma^a_{db} + (g_{ta}\Gamma^t_{di} + g_{ti}\Gamma^t_{da})\Gamma^a_{cb} +$$
$$+ g_{ia}(\Gamma^m_{db}\Gamma^a_{cm} - \Gamma^m_{cb}\Gamma^a_{dm}).$$

Таким образом, окончательно получаем для тензора Римана-Кристоффеля

$$R_{ib,cd} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{di}}{\partial x^b \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{db}}{\partial x^i \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{ci}}{\partial x^b \partial x^d} + \frac{\partial^2 g_{cb}}{\partial x^i \partial x^d}\right) + g_{ta}\Gamma^t_{di}\Gamma^a_{cb} - g_{ta}\Gamma^t_{ci}\Gamma^a_{db}.$$

Если в этой формуле сделать замену индексов $i \leftrightarrow c$ и $b \leftrightarrow d$, то правая часть этой формулы не изменится, а значит, выполнено свойство 3). Второе свойство легко следует из первого и третьего. Последнее тождество мы получим, если опустим первый индекс в тождестве Риччи (2.25). Полученное тождество также как и для тензора Римана-Кристоффеля называют *тождеством Риччи или тождеством Бианки.*

§2.10. Тензоры Бианки, Эйнштейна и Вейля.

Пусть (M,g) – (псевдо)риманово многообразие, ∇ – риманова связность, R – тензор Римана-Кристоффеля, то есть тензор кривизны римановой связности. Это тензорное поле типа (3,1) и его компоненты мы обозначили $\{R^i_{jk\ell}\}$. Если опустить у тензора Римана-Кристоффеля верхний индекс с помощью метрики g мы получим ковариантный тензор Римана-Кристоффеля с компонентами $R_{ij,k\ell} = g_{it}R^t_{jk\ell}$. Ковариантный тензор Римана-Кристоффеля мы так же будем обозначать буквой R. Согласно примеру 2.4 ковариантный тензор Римана-Кристоффеля обладает следующими свойствами симметрии: он кососимметричен по первой и последней парам индексов, симметричен при перестановке первой и последней пар индексов, а также удовлетворяет тождеству Риччи.

Построим обобщение этой конструкции. Пусть теперь дано произвольное гладкое многообразие M (задание на нем (псевдо)римановой структуры, вообще говоря, не предполагается). *Тензором Бианки* назовем тензорное поле типа (4,0) на произвольном гладком многообразии, которое кососимметрично по первой и последней паре индексов, не меняется при перестановке первой и второй пар индексов и удовлетворяет тождеству Риччи.

Задача 2.18**.** Докажите, что множество всех тензоров Бианки гладкого многообразия M образует $C^\infty(M)$-модуль. Будем обозначать его $\mathbf{B}(M)$.

Замечание 2.9**.** Можно показать, что для n-мерного гладкого многообразия M размерность модуля $\mathbf{B}(M)$ равна $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Пример 2.5**.** Приведем пример тензора Бианки, отличного от ковариантного тензора Римана-Кристоффеля. Пусть на гладком многообразии задана риманова метрика g. Рассмотрим тензорное поле E типа (4,0) с компонентами

$$g_{ij,k\ell} = \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{i\ell} \\ g_{jk} & g_{j\ell} \end{vmatrix}. \tag{2.35}$$

Непосредственная проверка условий определения тензора Бианки показывает, что такое тензорное поле является тензором Бианки. Проведите доказательство самостоятельно.

В инвариантном виде тензорное поле E имеет вид

$$E(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z). \tag{2.36}$$

Пусть (M, g) – (псевдо)риманово многообразие. *Тензором Риччи* тензора Бианки R называется тензорное поле типа (2,0), компоненты которого задаются следующим образом

$$r_{j\ell} = R^i_{ji\ell} = g^{ik} R_{ij,k\ell}, \tag{2.37}$$

где $\{g^{ij}\}$ – компоненты контравариантного метрического тензора. Будем обозначать тензор Риччи тензора Бианки R через $Ric(R)$. Если тензор Бианки R является тензором Римана-Кристоффеля, то будем обозначать его тензор Риччи через r.

Задача 2.19**.** Докажите, что тензор Риччи произвольного тензора Бианки является симметрическим.

След $tr\, Ric(R)$ тензора Риччи $Ric(R)$ определяется по формуле

$$tr\, Ric(R) = g^{ij} r_{ij} \tag{2.38}$$

и называется *скалярной кривизной* тензора Бианки R. Скалярную кривизну тензора Римана-Кристоффеля будем обозначать $\varkappa$.

Рассмотрим отображение Ric, которое каждому тензору Бианки ставит в соответствие его тензор Риччи. Нетрудно видеть, что это $C^\infty(M)$-линейное отображение модуля $\mathbf{B}(M)$ тензоров Бианки в модуль $\mathscr{S}^2(M)$ симметрических тензорных полей типа (2,0) на многообразии M.

Если размерность многообразия M равна 2, то $dim\, \mathbf{B}(M) = 1$ (см. замечание 2.9), а $dim\, \mathscr{S}^2(M) = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$. Таким образом, в случае двумерного многообразия M отображение R не является сюръективным.

В случае $dim\, M \geq 3$ дело обстоит как раз наоборот.

Теорема 2.16**.** *При $n \geq 3$ отображение Ric является сюръективным. Более того, оно обладает сечением, то есть для него существует обратное справа $C^\infty(M)$-линейное отображение*

$$Q : \mathscr{S}^2(M) \to \mathbf{B}(M).$$

Доказательство. Пусть $S \in \mathscr{S}^2(M)$ – произвольное симметричное тензорное поле типа (2,0) на многообразии M. Рассмотрим тензорное поле P с компонентами

$$P_{ij,k\ell} = g_{ik}S_{j\ell} - g_{i\ell}S_{jk} - g_{jk}S_{i\ell} + g_{j\ell}S_{ik}. \tag{2.39}$$

Непосредственная проверка (проведите самостоятельно) показывает, что тензорное поле P является тензором Бианки. Вычислим тензор Риччи для P.

$$(Ric\, P)_{j\ell} = g^{ik}P_{ij,k\ell} = g^{ik}(g_{ik}S_{j\ell} - g_{i\ell}S_{jk} - g_{jk}S_{i\ell} + g_{j\ell}S_{ik}) = nS_{j\ell} - 2S_{j\ell} + g^{ik}S_{ik}g_{j\ell}.$$

В инвариантном виде эта формула примет вид

$$Ric\, P = (n-2)S + (tr\, S)g,$$

где $tr\, S = g^{ik}S_{ik}$ – след тензорного поля S.

С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что при $S = g$ в формуле (2.39) получим $P = 2E$, где E – тензор Бианки из примера 2.5. Поэтому, во-первых,

$$Ric\, E = \frac{1}{2}((n-2)g + (tr\, g)g) = \frac{1}{2}((n-2)g + ng) = (n-1)g$$

и, во-вторых,

$$Ric\left(P - \frac{tr\, S}{n-1}E\right) = Ric\, P - \frac{tr\, S}{n-1}Ric\, E = (n-2)S + (tr\, S)g - (tr\, S)g = (n-2)S.$$

Поэтому формула

$$Q(S) = \frac{P}{n-2} - \frac{tr\, S}{(n-1)(n-2)}E$$

определяет требуемое отображение Q. Проверьте самостоятельно, что $Ric \circ Q = id$. □

Следствие 2.2**.** При $n \geq 3$ подмодуль $Im\, Q$ модуля $\mathbf{B}(M)$ изоморфен модулю $\mathscr{S}^2(M)$, причем $\mathbf{B}(M) = \mathscr{S}^2(M) \oplus \mathbf{B}_0(M)$, где $\mathbf{B}_0(M)$ – подмодуль в $\mathbf{B}(M)$, состоящий из тензоров Бианки с тензорами Риччи $Ric\, R = 0$.

Тензоры Бианки, для которых $Ric\, R = 0$, называются *тензорами Вейля* (физики их называют также *безриччиевыми тензорами*), а тензоры вида $Q(S)$ – *тензорами Эйнштейна.*

Таким образом, следствие 2.2 утверждает, что любой тензор Бианки однозначно раскладывается в сумму некоторого тензора Эйнштейна и некоторого тензора Вейля.

Следствие 2.3. В случае $n = 3$ модуль $Im\,Q$ исчерпывает весь модуль $\mathbf{B}(M)$, то есть любой тензор Бианки является тензором Эйнштейна $Q(Ric\,R)$.

Доказательство. Вычислим

$$dim\,\mathbf{B}(M) - dim\,\mathscr{S}^2(M) = \frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2}$$

При $n = 3$ эта разность равна нулю. □

Из следствия 2.3, в частности, вытекает, что ковариантный тензор Римана-Кристоффеля риманова многообразия при $n = 3$ имеет вид

$$R_{ij,k\ell} = g_{ik}r_{j\ell} - g_{i\ell}r_{jk} + g_{j\ell}r_{ik} - g_{jk}r_{i\ell} - \frac{\varkappa}{2}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}).$$

Действительно, при $n = 3$ имеем $R = Q(r)$, где r – тензор Риччи риманова многообразия M. Тогда

$$R = Q(r) = \frac{P}{3-2} - \frac{tr\,r}{(3-1)(3-2)}E.$$

Учитывая (2.39) и (2.38) получим требуемую формулу.

§2.11. Конформные преобразования римановых многообразий.

11.1. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности выше 2, R – ковариантный тензор Римана-Кристоффеля. Согласно следствию 2.2 тензор R однозначно представим в виде

$$R = Q(r) + W,$$

где r – тензор Риччи тензора Римана-Кристоффеля, W – тензор Бианки с компонентами

$$W_{ij,k\ell} = R_{ij,k\ell} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}r_{j\ell} - g_{i\ell}r_{jk} - g_{jk}r_{i\ell} + g_{j\ell}r_{ik}\right) + \frac{\varkappa}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}). \tag{2.40}$$

Здесь мы использовали результаты доказательства теоремы 2.16. Тензор Бианки W называется *вейлевской компонентой тензора кривизны.* Это тензорное поле имеет интересный геометрический смысл.

Рассмотрим тензорное поле

$$\tilde{g} = e^{2f}g,\ f \in C^\infty(M). \tag{2.41}$$

Задача 2.20. Докажите, что тензорное поле $\tilde{g}$ является римановой структурой на многообразии M.

Переход от метрики g к метрике $\tilde{g}$ называется *конформным преобразованием риманова многообразия* (M, g).

Задача 2.21. Докажите, что для контравариантного метрического тензорного поля g^{ij} (см. § 2.9.) имеет место равенство

$$\tilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}.$$

Решение. По определению контравариантного метрического тензорного поля имеем $\tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{jk} = \delta^i_k$. Тогда

$$\tilde{g}^{ij}e^{2f}g_{jk} = \delta^i_k.$$

Свернем последнее равенство с $g^{k\ell}$ и снова воспользуемся тем, что матрицы g^{ij} и g_{ij} взаимно обратны:

$$e^{2f}\tilde{g}^{ij}\delta^\ell_j = \delta^i_k g^{k\ell}.$$

Откуда с учетом определения дельты Кронекера получим

$$e^{2f}\tilde{g}^{i\ell} = g^{i\ell},$$

что, очевидно, равносильно требуемому равенству. □

Если функция f является константой, то из формулы (2.27) следует, что римановы связности ∇ и $\tilde{\nabla}$ римановых метрик g и $\tilde{g}$ совпадают (убедитесь в этом самостоятельно), а значит, совпадают и тензоры кривизны этих связностей, то есть $\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = 0$ в случае $f = const$. Вычислим эту разность в общем случае. Согласно формуле (**??**) получим

$$\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{kj}}{\partial x^\ell} + \tilde{\Gamma}^m_{\ell j}\tilde{\Gamma}^i_{km} - \tilde{\Gamma}^m_{kj}\tilde{\Gamma}^i_{\ell m} - \frac{\partial\Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} + \frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} - \Gamma^m_{\ell j}\Gamma^i_{km} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{\ell m} \tag{2.42}$$

Введем обозначения

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}; \quad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} f_k \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} f_k. \tag{2.43}$$

Докажем, что

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^\ell} = 2e^{2f} f_\ell g_{ij} + e^{2f} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}.$$

В самом деле, по правилу дифференцирования произведения получим

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^\ell} = \frac{\partial}{\partial x^\ell}(e^{2f} g_{ij}) = 2e^{2f} \frac{\partial f}{\partial x^\ell} g_{ij} + e^{2f} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell},$$

что совпадает с требуемой формулой, если учесть введенные обозначения.

Тогда с учетом (2.29) и задачи 2.21 получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{im} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{g}_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} e^{-2f} g^{im} \left(2e^{2f} f_k g_{jm} + 2e^{2f} f_j g_{km} - 2e^{2f} f_m g_{jk} + e^{2f} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \right.$$

$$\left. + \, e^{2f} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - e^{2f} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) = \Gamma^i_{jk} + g^{im}(f_k g_{jm} + f_j g_{km} - f_m g_{jk}) =$$

$$= \Gamma^i_{jk} + f_k \delta^i_j + f_j \delta^i_k - f_m g^{im} g_{jk}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \text{ где } \quad T^i_{jk} = f_k \delta^i_j + f_j \delta^i_k - f_m g^{im} g_{jk}. \tag{2.44}$$

Заметим, что T^i_{jk} – компоненты тензора аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ (см. задачу 2.12).

Продифференцируем предпоследнее равенство оператором $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^\ell}.$$

и подставим в (2.42)

$$\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = \frac{\partial T^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_{kj}}{\partial x^\ell} + T^m_{\ell j} T^i_{km} + \Gamma^m_{\ell j} T^i_{km} + T^m_{\ell j} \Gamma^i_{km} - T^m_{kj} T^i_{\ell m} - \Gamma^m_{kj} T^i_{\ell m} - T^m_{kj} \Gamma^i_{\ell m}. \tag{2.45}$$

Чтобы упростить это выражение, воспользуемся формулой (2.13):

$$\nabla_X(T)(Y, Z) = \left(\frac{\partial T^i_{k\ell}}{\partial x^j} + T^m_{k\ell} \Gamma^i_{jm} - T^i_{m\ell} \Gamma^m_{jk} - T^i_{km} \Gamma^m_{j\ell} \right) X^j Y^k Z^\ell \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.46}$$

Положим в этой формуле $X = \frac{\partial}{\partial x^p}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^t}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^q}$. Тогда левая часть последней формулы примет вид

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^p}}(T)(\frac{\partial}{\partial x^t}, \frac{\partial}{\partial x^q}) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^p}} T \right)^i_{tq} \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \nabla_p T^i_{tq} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Последнее равенство – это обозначение! Правая часть формулы (2.46) примет вид

$$\nabla_p T^i_{tq} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial T^i_{tq}}{\partial x^p} + T^m_{tq} \Gamma^i_{pm} - T^i_{mq} \Gamma^m_{pt} - T^i_{tm} \Gamma^m_{pq} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Откуда в силу линейной независимости базисных векторных полей получим

$$\nabla_p T^i_{tq} = \frac{\partial T^i_{tq}}{\partial x^p} + T^m_{tq} \Gamma^i_{pm} - T^i_{mq} \Gamma^m_{pt} - T^i_{tm} \Gamma^m_{pq} \tag{2.47}$$

Выражая из этого равенства частную производную компоненты тензора аффинной деформации и подставляя ее в равенство (2.45), получим

$$\tilde{R}^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = \nabla_k T^i_{\ell j} - \nabla_\ell T^i_{kj} + T^m_{\ell j} T^i_{km} - T^m_{kj} T^i_{\ell m}. \tag{2.48}$$

Выразим теперь все слагаемые через функцию f и метрические тензорные поля. С учетом (2.47) и (2.44) получим

$$\nabla_k T^i_{\ell j} = \frac{\partial T^i_{\ell j}}{\partial x^k} + T^m_{\ell j} \Gamma^i_{km} - T^i_{mj} \Gamma^m_{k\ell} - T^i_{\ell m} \Gamma^m_{kj} = \frac{\partial}{\partial x^k}(f_\ell \delta^i_j + f_j \delta^i_\ell - f_p g^{ip} g_{\ell j}) + (f_\ell \delta^m_j + f_j \delta^m_\ell - f_p g^{mp} g_{\ell j}) \Gamma^i_{km} -$$

$$- (f_m \delta^i_j + f_j \delta^i_m - f_p g^{ip} g_{mj}) \Gamma^m_{k\ell} - (f_\ell \delta^i_m + f_m \delta^i_\ell - f_p g^{ip} g_{\ell m}) \Gamma^m_{kj} = \frac{\partial f_\ell}{\partial x^k} \delta^i_j + \frac{\partial f_j}{\partial x^k} \delta^i_\ell - \frac{\partial f_p}{\partial x^k} g^{ip} g_{\ell j} - f_p \frac{\partial g^{ip}}{\partial x^k} g_{\ell j} -$$

$$- f_p g^{ip} \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} + f_\ell \Gamma^i_{kj} + f_j \Gamma^i_{k\ell} - f_p g^{mp} g_{\ell j} \Gamma^i_{km} + f_m \delta^i_j \Gamma^m_{k\ell} - f_j \Gamma^i_{k\ell} + f_p g^{ip} g_{mj} \Gamma^m_{k\ell} - f_\ell \Gamma^i_{kj} - f_m \delta^i_\ell \Gamma^m_{kj} + f_p g^{ip} g_{\ell m} \Gamma^m_{kj} =$$

$$= f_{\ell k} \delta^i_j + f_{jk} \delta^i_\ell - \frac{\partial f_p}{\partial x^k} g^{ip} g_{\ell j} - f_p g_{\ell j}(-g^{mp} \Gamma^i_{km} - g^{im} \Gamma^p_{km}) - f_p g^{mp} g_{\ell j} \Gamma^i_{km} = f_{\ell k} \delta^i_j + f_{jk} \delta^i_\ell - f_{pk} g^{ip} g_{\ell j}.$$

Здесь мы также воспользовались обозначениями (2.43) и формулами (2.31), (2.30). Таким образом, мы получаем

$$\nabla_k T^i_{\ell j} = f_{\ell k}\delta^i_j + f_{jk}\delta^i_\ell - f_{pk}g^{ip}g_{\ell j};\quad \nabla_\ell T^i_{kj} = f_{k\ell}\delta^i_j + f_{j\ell}\delta^i_k - f_{p\ell}g^{ip}g_{kj}$$

Второе равенство мы получили из первого, поменяв местами индексы k и ℓ. Заметим, что $f_{k\ell} = f_{\ell k}$ (см. обозначения (2.43) с учетом симметричности римановой связности и непрерывности функции f). Тогда разность этих двух выражений равна

$$\nabla_k T^i_{\ell j} - \nabla_\ell T^i_{kj} = f_{jk}\delta^i_\ell - f_{pk}g^{ip}g_{\ell j} - f_{j\ell}\delta^i_k + f_{p\ell}g^{ip}g_{kj} \tag{2.49}$$

Теперь вычислим разность третьего и четвертого членов выражения (2.48). Для третьего слагаемого имеем

$$T^m_{\ell j}T^i_{km} = (f_\ell\delta^m_j + f_j\delta^m_\ell - f_p g^{mp}g_{\ell j})(f_k\delta^i_m + f_m\delta^i_k - f_t g^{it}g_{km}) = f_\ell f_k\delta^i_j + 2f_\ell f_j\delta^i_k - f_\ell f_t g^{it}g_{kj} + f_j f_k\delta^i_\ell -$$
$$- f_j f_t g^{it}g_{k\ell} - f_p f_m g^{mp}g_{\ell j}\delta^i_k.$$

Тогда четвертый член будет равен

$$T^m_{kj}T^i_{\ell m} = f_k f_\ell\delta^i_j + 2f_k f_j\delta^i_\ell - f_k f_t g^{it}g_{\ell j} + f_j f_\ell\delta^i_k - f_j f_t g^{it}g_{\ell k} - f_p f_m g^{mp}g_{kj}\delta^i_\ell.$$

Таким образом, разность третьего и четвертого членов будет равна

$$T^m_{\ell j}T^i_{km} - T^m_{kj}T^i_{\ell m} = f_\ell f_j\delta^i_k - f_\ell f_t g^{it}g_{kj} - f_p f_m g^{mp}g_{\ell j}\delta^i_k - f_k f_j\delta^i_\ell + f_k f_p g^{ip}g_{\ell j} + f_p f_m g^{mp}g_{kj}\delta^i_\ell. \tag{2.50}$$

Подставляем (2.49) и (2.50) в (2.48) и группируем слагаемые следующим образом

$$\tilde R^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = (f_{jk} - f_j f_k)\delta^i_\ell - f_p f_m g^{mp}g_{\ell j}\delta^i_k - g^{ip}g_{\ell j}(f_{pk} - f_k f_p) - (f_{j\ell} - f_j f_\ell)\delta^i_k + f_p f_m g^{mp}g_{kj}\delta^i_\ell + g^{ip}g_{kj}(f_{p\ell} - f_\ell f_p).$$

Получив это равенство, мы выполнили поставленную задачу – выразить разность $\tilde R^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell}$ через исходные объекты. Но для придания формуле большей симметричности мы сгруппируем слагаемые по-другому. Введем обозначение

$$S_{jk} = f_{jk} - f_j f_k + \frac{1}{2}f_p f_m g^{mp}g_{jk}. \tag{2.51}$$

Тогда последнее равенство примет вид

$$\tilde R^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = \left(S_{jk} - \frac{1}{2}f_p f_m g^{mp}g_{jk}\right)\delta^i_\ell - f_p f_m g^{mp}g_{\ell j}\delta^i_k - g^{ip}g_{\ell j}\left(S_{pk} - \frac{1}{2}f_t f_m g^{mt}g_{pk}\right) -$$
$$- \left(S_{j\ell} - \frac{1}{2}f_p f_m g^{mp}g_{j\ell}\right)\delta^i_k + f_p f_m g^{mp}g_{kj}\delta^i_\ell + g^{ip}g_{kj}(S_{p\ell} - \frac{1}{2}f_t f_m g^{mt}g_{p\ell})$$

Раскройте скобки, приведите подобные и убедитесь, что получится следующий результат

$$\tilde R^i_{jk\ell} - R^i_{jk\ell} = S_{jk}\delta^i_\ell - S_{j\ell}\delta^i_k - g^{ip}g_{\ell j}S_{pk} + g^{ip}g_{kj}S_{p\ell}.$$

Для придания этому тождеству еще большей симметричности свернем его с g_{it}. В левой части получим

$$g_{it}\tilde R^i_{jk\ell} - g_{it}R^i_{jk\ell} = e^{-2f}\tilde g_{it}\tilde R^i_{jk\ell} - g_{it}R^i_{jk\ell} = e^{-2f}\tilde R_{tj,k\ell} - R_{tj,k\ell}.$$

Тогда

$$e^{-2f}\tilde R_{tj,k\ell} - R_{tj,k\ell} = g_{t\ell}S_{jk} - g_{tk}S_{j\ell} - g_{\ell j}S_{tk} + g_{kj}S_{t\ell}, \tag{2.52}$$

где S – симметричное тензорное поле типа (2,0) с компонентами (2.51).

Найдем соотношение между тензорами Риччи исходного и конформно преобразованного многообразия. Для этого свернем равенство (2.52) с g^{tk}.

$$\tilde r_{j\ell} - r_{j\ell} = 2S_{j\ell} - \delta^t_t S_{j\ell} - g_{\ell j}g^{tk}S_{tk} = -(n-2)S_{j\ell} - g_{\ell j}g^{tk}S_{tk}. \tag{2.53}$$

Свернем полученное равенство с $g^{j\ell}$.

$$e^{-2f}\tilde\varkappa - \varkappa = -2(n-1)g^{tk}S_{tk}. \tag{2.54}$$

Из формул (2.53) и (2.54) при $n > 2$ получим

$$S_{j\ell} = -\frac{\tilde r_{j\ell} - r_{j\ell}}{n-2} + g_{j\ell}\frac{e^{-2f}\tilde\varkappa - \varkappa}{2(n-1)(n-2)}$$

и поэтому

$$e^{-2f}\tilde{R}_{tj,k\ell}-R_{tj,k\ell}=g_{t\ell}S_{jk}-g_{tk}S_{j\ell}-g_{\ell j}S_{tk}+g_{kj}S_{t\ell}=g_{t\ell}\left(-\frac{\tilde{r}_{jk}-r_{jk}}{n-2}+g_{jk}\frac{e^{-2f}\tilde{\varkappa}-\varkappa}{2(n-1)(n-2)}\right)-$$
$$-g_{tk}\left(-\frac{\tilde{r}_{j\ell}-r_{j\ell}}{n-2}+g_{j\ell}\frac{e^{-2f}\tilde{\varkappa}-\varkappa}{2(n-1)(n-2)}\right)-g_{\ell j}\left(-\frac{\tilde{r}_{tk}-r_{tk}}{n-2}+g_{tk}\frac{e^{-2f}\tilde{\varkappa}-\varkappa}{2(n-1)(n-2)}\right)+$$
$$+g_{kj}\left(-\frac{\tilde{r}_{t\ell}-r_{t\ell}}{n-2}+g_{t\ell}\frac{e^{-2f}\tilde{\varkappa}-\varkappa}{2(n-1)(n-2)}\right).$$

Сравнивая это равенство с (2.40), получим

$$e^{-2f}\tilde{R}_{tj,k\ell}-R_{tj,k\ell}=e^{-2f}(-\tilde{W}_{tj,k\ell}+\tilde{R}_{tj,k\ell})+W_{tj,k\ell}-R_{tj,k\ell}.$$

Таким образом, вейлевские компоненты тензоров кривизны римановых связностей при конформном преобразовании метрики связаны соотношением

$$\tilde{W}_{tj,k\ell}=e^{2f}W_{tj,k\ell}.$$

Поднимем первый индекс в этом равенстве. Для этого свернем его с $\tilde{g}^{it}$ и учтем, что $\tilde{g}^{it}=e^{-2f}g^{it}$.

$$\tilde{W}^i_{jk\ell}=W^i_{jk\ell}.$$

Это означает, что тензорное поле W типа (3,1) с компонентами $W^i_{jk\ell}$ не изменяется при конформном преобразовании метрики, то есть является *конформно инвариантным.* Тензорное поле W типа (3,1) называется *тензором Вейля конформной кривизны.* Он является основным инвариантном конформного преобразования метрики.

§2.12. Римановы многообразия, наделенные дополнительными структурами.

12.1. Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n>2$. Рассмотрим на M пару $(g=\langle\cdot,\cdot\rangle,J)$, где g – риманова структура на M, а J – почти комплексная структура на M, согласованная с g, то есть

$$J\circ J=-id;\quad \langle JX,JY\rangle=\langle X,Y\rangle,\ X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

называется *почти эрмитовой структурой* на многообразии M.

Задача 2.22. Докажите, что для почти эрмитовой структуры имеет место тождество

$$\langle JX,Y\rangle+\langle X,JY\rangle=0,\ X,Y\in\mathfrak{X}(M). \tag{2.55}$$

Задача 2.23. Докажите, что если ∇ – риманова связность, то для почти эрмитовой структуры $(g=\langle\cdot,\cdot\rangle,J)$ получим

$$\langle\nabla_X(J)Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X(J)Z\rangle=0.$$

Решение. Воспользуемся результатом примера 1.36. Тогда формула (2.55) равносильна равенству $C^{(1)}_{(2)}(J\otimes g)+C^{(1)}_{(2)}(g\otimes J)=0$. Применим к ней оператор ∇_X. Используя то, что $\nabla_X g=0$ в римановой связности, получим

$$C^{(1)}_{(2)}(\nabla_X J\otimes g)+C^{(1)}_{(2)}(g\otimes\nabla_X J)=0.$$

Вернемся обратно к обычной записи, используя пример 1.36.

$$g(\nabla_X(J)Y,Z)+g(Y,\nabla_X(J)Z)=0.$$

Второй способ решения этой задачи более длинный, но идейно более простой. Опять рассмотрим равенство (2.55) и переведем его на язык сверток и тензорных произведений:

$$g(JX,Y)+g(X,JY)=g_{kj}J^k_iX^iY^j+g_{ik}J^k_jX^iY^j=(g\otimes J\otimes X\otimes Y)^{kij}_{kji}+(g\otimes J\otimes X\otimes Y)^{kij}_{ikj}=$$
$$=C^{(1)(2)(3)}_{(1)(3)(2)}(g\otimes J\otimes X\otimes Y)+C^{(1)(2)(3)}_{(2)(1)(3)}(g\otimes J\otimes X\otimes Y).$$

Тогда равенство (2.55) принимает вид

$$C^{(1)(2)(3)}_{(1)(3)(2)}(g\otimes J\otimes X\otimes Y)+C^{(1)(2)(3)}_{(2)(1)(3)}(g\otimes J\otimes X\otimes Y)=0.$$

Применим оператор ∇_Z к обеим частям этого равенства и учтем, что $\nabla_Z g = 0$ в римановой связности:

$$C^{(1)(2)(3)}_{(1)(3)(2)}(g \otimes \nabla_Z J \otimes X \otimes Y) + g \otimes J \otimes \nabla_Z X \otimes Y + g \otimes J \otimes X \otimes \nabla_Z Y) + \\ + C^{(1)(2)(3)}_{(2)(1)(3)}(g \otimes \nabla_Z J \otimes X \otimes Y) + g \otimes J \otimes \nabla_Z X \otimes Y + g \otimes J \otimes X \otimes \nabla_Z Y) = 0.$$

Возвращаемся к привычной записи:

$$g(\nabla_Z(J)(X), Y) + g(J(\nabla_Z X), Y) + g(JX, \nabla_Z Y) + g(X, \nabla_Z(J)Y) + g(\nabla_Z X, JY) + g(X, J(\nabla_Z Y)) = 0.$$

Воспользуемся равенством (2.55) и окончательно получим

$$g(\nabla_Z(J)X, Y) + g(X, \nabla_Z(J)Y) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Задача 2.24. Построим отображение $N : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$N_J(X, Y) = \frac{1}{4}\left(-[X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y]\right),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.56}$$

Выразите $N_J(X, Y)$ через ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма J в римановой связности и, используя этот результат, покажите, что отображение N является тензорным полем типа (2,1). Это тензорное поле называется *тензором Нейенхейса.*

Решение. Так как связность риманова, ее тензор кручения равен нулю, то есть

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{2.57}$$

Подставим это равенство в (2.56):

$$4N_J(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)). \tag{2.58}$$

Напомним, что в задаче 2.6 была получена формула

$$\nabla_X(JY) = \nabla_X(J)Y + J\nabla_X Y.$$

Подставим ее в (2.58):

$$4N_J(X, Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_{JX}(J)Y + J\nabla_{JX} Y - \nabla_{JY}(J)X - J\nabla_{JY} X - J(\nabla_X(J)Y + J\nabla_X Y - \nabla_{JY} X) - \\ - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(J)X - J\nabla_Y X)$$

Учитывая, что для почти комплексной структуры $J^2 = -id$, получим

$$4N_J(X, Y) = \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X - J\nabla_X(J)Y + J\nabla_Y(J)X.$$

Наконец, используем результатом примера 2.2: $J\nabla_X(J)Y + \nabla_X(J)(JY) = 0$,

$$4N_J(X, Y) = \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X + \nabla_X(J)JY - \nabla_Y(J)JX.$$

□

Пусть на почти эрмитовом многообразии (M, J, g) задано тензорное поле типа (2,1) по формуле

$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX, \tag{2.59}$$

где ψ – некоторая 1-форма на M.

Задача 2.25. Докажите, что

$$T(JX, Y) = T(X, JY) = JT(X, Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.60}$$

Решение. Используя равенство (2.59) и $J^2 = -id$, получим

$$T(JX, Y) = \psi(JX)Y + \psi(Y)JX + \psi(X)JY + \psi(JY)X;$$
$$T(X, JY) = \psi(X)JY + \psi(JY)X + \psi(JX)Y + \psi(Y)JX;$$
$$JT(X, Y) = \psi(X)JY + \psi(Y)JX + \psi(JX)Y + \psi(JY)X;$$

Полученные равенства доказывают (2.60). □

Пусть ∇ – риманова связность метрики g. Рассмотрим связность $\tilde{\nabla}$, заданную формулой $\tilde{\nabla} = \nabla + T$.

Задача 2.26. Докажите, что $\tilde{\nabla}$ – связность без кручения и, что

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y,$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Решение. Воспользуемся формулой из задачи 2.6: $\nabla_X(J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$. Тогда

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y = \tilde{\nabla}_X(JY) - J\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X(JY) + T(X, JY) - J(\nabla_X Y + T(X, Y)) =$$
$$= \nabla_X(J)Y + T(X, JY) - JT(X, Y) = \nabla_X(J)Y.$$

Здесь мы воспользовались результатом задачи 2.25. □

Задача 2.27. Докажите, что для тензорного поля T, заданного формулой (2.59), имеет место равенство

$$\nabla_X(T)(Y, Z) = (\nabla_X(\psi)Y)Z + (\nabla_X(\psi)Z)Y - (\nabla_X(\psi)(JY))JZ - \psi(\nabla_X(J)Y)JZ - \psi(JY)\nabla_X(J)Z -$$
$$- \psi(JZ)\nabla_X(J)Y - (\nabla_X(\psi)(JZ))JY - (\psi(\nabla_X(J)Z))JY.$$

где ∇ – произвольная связность на гладком многообразии M.

Указания. Используйте результат задачи 1.20.

12.2. Пусть на многообразии M задан набор тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ – тензорное поле типа (1,1), ξ – векторное поле, η – 1-форма, g – риманова метрика (эти тензорные поля называются *структурными тензорными полями*). При этом выполняются соотношения

$$1)\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \quad 2)\ \eta(\xi) = 1;$$
$$3)\ \Phi(\xi) = 0; \quad 4)\ \eta \circ \Phi = 0;$$

$$5)\ g(\Phi Y, \Phi Z) = g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z).$$

Такой набор тензорных полей называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M.

Задача 2.28. Докажите, что для почти контактной метрической структуры

$$\eta(X) = g(X, \xi),\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

В частности, отсюда следует, что $g(\xi, \xi) = 1$, то есть в каждой точке многообразия M вектор ξ_p является единичным относительно метрики g.

Указание: воспользуйтесь условием 5).

Задача 2.29. Докажите, что для почти контактной метрической структуры верно тождество

$$g(\Phi X, Y) + g(X, \Phi Y) = 0,\ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Напомним, что с тройкой тензорных полей (Φ, ξ, η) мы уже встречались в примере 2.10. На первые четыре условия мы уже действовали оператором ∇_X.

Задача 2.30. Подействуйте оператором ∇_X на пятое условие: а) если ∇ – произвольная связность; б) если ∇ – риманова связность метрики g.

Задача 2.31. Докажите, что для почти контактной метрической структуры (Φ, ξ, η, g) на многообразии M имеет место равенство

$$g(\nabla_X \xi, \xi) = 0,$$

где ∇ – риманова связность метрики g. Выведите из этого, что

$$\nabla_X(\eta)\xi = 0$$

для любой почти контактной метрической структуры.

Для почти контактного метрического многообразия, так же как и для почти эрмитова многообразия, определяется тензор Нейенхейса $N : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}\left(\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y]\right).$$

Задача 2.32. Выразите $N_\Phi(X, Y)$ через ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма Φ в римановой связности метрики g и, используя этот результат, докажите, что отображение N является тензорным полем типа (2,1).

Глава 3. Приложения.

§3.1. Секционные кривизны.

1.1. Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Рассмотрим модуль $\Lambda^2(M)$, состоящий из кососимметрических тензорных полей типа $(0,2)$. Будем обозначать элементы из $\Lambda^2(M)$ буквами $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$.

Пример 3.1. Пусть X и Y – векторные поля на многообразии M. Тогда определено тензорное поле $X\wedge Y$ типа $(0,2)$. Из определения операции внешнего умножения следует, что это тензорное поле будет кососимметричным, то есть будет принадлежать модулю $\Lambda^2(M)$. Оно называется *бивекторным тензорным полем*. Заметим, что множество бивекторных тензорных полей не образует ни векторного пространства, ни модуля.

Выразим компоненты бивекторного поля $X\wedge Y$ через компоненты векторных полей X и Y в натуральном базисе. По определению компонент имеем

$$(X\wedge Y)^{ij} = (X\wedge Y)(dx^i, dx^j) = \frac{1}{1!1!}(X(dx^i)Y(dx^j) - X(dx^j)Y(dx^i)) = X^iY^j - Y^iX^j.$$

Пусть R – тензор Бианки (см. § 2.10.), $\{R_{ijk\ell}\}$ – его компоненты в натуральном базисе. Определим отображение $R:\Lambda^2(M)\times\Lambda^2(M)\to C^\infty(M)$ по формуле

$$R(\mathscr{X},\mathscr{Y}) = R_{ij,k\ell}\mathscr{X}^{ij}\mathscr{Y}^{k\ell}.$$

Легко видеть, что это отображение является $C^\infty(M)$-линейным.

Пример 3.2. Вычислим значение отображения R на бивекторных тензорных полях $X\wedge Y$ и $Z\wedge W$. Имеем с учетом примера 3.1 и свойств симметрии тензора Римана-Кристоффеля

$$\begin{aligned}R(X\wedge Y, Z\wedge W) &= R_{ijk\ell}(X\wedge Y)^{ij}(Z\wedge W)^{k\ell} = R_{ij,k\ell}(X^iY^j - X^jY^i)(Z^kW^\ell - Z^\ell W^k) =\\ &= R_{ij,k\ell}X^iY^jZ^kW^\ell - R_{ij,k\ell}X^iY^jZ^\ell W^k - R_{ij,k\ell}X^jY^iZ^kW^\ell + R_{ij,k\ell}X^jY^iZ^\ell W^k =\\ &= 4R_{k\ell,ij}X^iY^jZ^kW^\ell = 4g(R(X,Y)W,Z).\end{aligned}$$

Здесь мы также воспользовались обозначением (2.33).

Итак, $R(X\wedge Y, Z\wedge W) = 4R_{k\ell,ij}X^iY^jZ^kW^\ell = 4g(R(X,Y)W,Z)$.

Пусть $m\in M$ – произвольная точка. Тогда для значения R_m тензора Римана-Кристоффеля R в точке m аналогичным образом строится линейный оператор $R_m:\Lambda^2(T_m(M))\times\Lambda^2(T_m(M))\to\mathbb{R}$ по формуле $R_m(\mathscr{X}_m,\mathscr{Y}_m) = (R_m)_{ij,k\ell}(\mathscr{X}_m)^ij(\mathscr{Y}_m)^{k\ell}$, где $\mathscr{X}_m,\mathscr{Y}_m\in\Lambda^2(T_m(M))$ – произвольные элементы.

Задача 3.1. Докажите, что для бивекторов $X_m\wedge Y_m$ и $Z_m\wedge W_m$ справедливо равенство

$$R_m(X_m\wedge Y_m, Z_m\wedge W_m) = 4g_m(R_m(X_m,Y_m)W_m, Z_m).$$

1.2. Пусть дано риманово многообразие (M,g). Пусть R – тензор кривизны римановой связности, то есть тензор Римана-Кристоффеля, $A,B\in T_{p_0}(M)$ – произвольные фиксированные векторы из касательного пространства в произвольной фиксированной точке $p_0\in M$. Выясним геометрический смысл чисел $R_{p_0}(A\wedge B, A\wedge B)$.

Можно показать, что при параллельном переносе по бесконечно малому "параллелограмму " со сторонами sA и sB вектор $\xi_0\in T_{p_0}(M)$ переходит в вектор

$$\xi_1 = \xi_0 - s^2R(A,B)\xi_0 + O(s^3),$$

где R рассматривается как тензорное поле типа (3,0) и берется его значение в точке p_0.

Замечание 3.1. Напомним термин "О большое". Говорят, что функция $f(x)$ является " О большим " от функции $g(x)$ при $x\to x_0$, если существует такая константа $C>0$, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|f(x)|\le C|g(x)|$.

Пусть вектор ξ_0 принадлежит двумерному векторному пространству $\pi\subset T_{p_0}(M)$, натянутому на векторы A и B. Тогда, вообще говоря, вектор ξ_1 не принадлежит векторному пространству π. Пусть ξ_1' – ортогональная проекция вектора ξ_1 на пространство π. Вычислим угол между векторами ξ_0 и ξ_1'.

Не теряя общности, будем предполагать, что вектор ξ_0 единичный. Дополним его до ортонормированного базиса (ξ_0,η_0) пространства π, задающего ту же ориентацию, что и базис (A,B). Разложим вектор $\xi_1'-\xi_0$ по базису (ξ_0,η_0)

$$\xi_1'-\xi_0 = a\xi_0 + b\eta_0 \quad\Leftrightarrow\quad \xi_1' = (a+1)\xi_0 + b\eta_0.$$

Откуда получим, что в базисе (ξ_0, η_0) вектор ξ_1' имеем координаты $(a+1, b)$ и интересующий нас угол будет удовлетворять соотношению

$$tg\,\varphi = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{b}{a+1}.$$

При этом

$$a = g(\xi_1' - \xi_0, \xi_0) = g(\xi_1 - \xi_0, \xi_0) = -s^2 g(R(A,B)\xi_0, \xi_0) + O(s^3) = O(s^3)$$

Здесь значение метрики g берется в точке p_0 и учитывается, что для ортогональной составляющей вектора ξ_1 скалярное произведение на ξ_0 равно нулю. Также здесь использовано то, что $g(R(A,B)\xi_0, \xi_0)$ – значение ковариантного тензора Римана-Кристоффеля на двух одинаковых аргументах (это это нуль в силу кососимметричности названного тензора по первой паре аргументов).

Аналогичным образом получим

$$b = g(\xi_1' - \xi_0, \eta_0) = g(\xi_1 - \xi_0, \eta_0) = -s^2 g(R(A,B)\xi_0, \eta_0) + O(s^3).$$

Поскольку

$$\tfrac{b}{1+a} = b + O(a); \quad \varphi = arctg(tg\,\varphi) = tg\,\varphi + O(tg^3\,\varphi)$$

отсюда следует, что

$$\varphi = -s^2 g(R(A,B)\xi_0, \eta_0) + O(s^3).$$

С другой стороны, используя задачу 3.1, получим

$$-g(R(A,B)\xi_0, \eta_0) = -\frac{1}{4} R(A \wedge B, \eta_0 \wedge \xi_0) = \frac{1}{4} R(A \wedge B, \xi_0 \wedge \eta_0) == \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{R(A \wedge B, A \wedge B)}{|A \wedge B|},$$

где $|A \wedge B|$ – норма бивектора $A \wedge B$ со знаком в метрике бивекторов, порожденной евклидовой структурой g в точке p_0 (см. курс Тензорная алгебра). Здесь мы воспользовались результатом $A \wedge B = \frac{1}{\sqrt{2}} |A \wedge B| \xi_0 \wedge \eta_0$ из курса Тензорная алгебра. Тогда

$$\varphi = s^2 \frac{\sqrt{2} R(A \wedge B, A \wedge B)}{4|A \wedge B|} + O(s^3).$$

Поскольку число $\frac{s^2 |A \wedge B|}{\sqrt{2}}$ равно ориентированной площади σ параллелограмма, натянутого на вектора sA и sB, получаем

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}\sigma}{|A \wedge B|} \frac{\sqrt{2} R(A \wedge B, A \wedge B)}{4|A \wedge B|} + O(s^3).$$

Тогда

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{\sigma} = \frac{R(A \wedge B, A \wedge B)}{2|A \wedge B|^2} = \frac{R(A \wedge B, A \wedge B)}{2||A \wedge B||^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что квадрат длины бивектора со знаком равен квадрату длины этого бивектора.

Обозначим

$$K_{p_0}(\pi) = \frac{R(A \wedge B, A \wedge B)}{2||A \wedge B||^2} = \frac{2g(R(A,B)B, A)}{||A \wedge B||^2}. \tag{3.1}$$

Задача 3.2**.** Покажите, что число $K_{p_0}(\pi)$ не зависит от выбора линейно независимых векторов A и B в векторном пространстве π, то есть число $K_{p_0}(\pi)$ зависит только от площадки π и не зависит от выбора пары линейно независимых векторов в нем, причем порядок выбора этих векторов также не существенен.

Число $K_{p_0}(\pi)$ называется *секционной кривизной риманова многообразия M в точке p_0 в направлении площадки π.*

Мы получили геометрический смысл секционной кривизны в точке p_0 риманова многообразия M: это предельное значение отношения угла между вектором ξ_0 и ортогональной проекцией вектора, получающегося из ξ_0 при перенесении по бесконечно малому параллелограмму, к площади этого параллелограмма.

Замечание 3.2**.** Понятие секционной кривизны можно ввести и для псевдо-римановых многообразий. В этом случае существуют двумерные площадки, для которых $||A \wedge B|| = 0$, хотя векторы A и B линейно независимы (это изотропные площадки). Чтобы избежать появления нуля в знаменателе при определении секционной кривизны, мы уберем из рассмотрения площадки такого вида. Тогда для каждой точки p_0 и неизотропной площадки, определяемой бивектором $A \wedge B$, определяется число $K_{p_0}(\pi)$ по формуле (3.1).

1.3. Отпустим точку p_0. Тогда мы получим функцию $K_p(\pi)$, которая зависит не только от двумерного векторного пространства π, но и от точки p. В правой части формулы (3.1) вместо векторов появятся векторные поля:

$$K_p(\pi) = \frac{R(X \wedge Y, X \wedge Y)}{2||X \wedge Y||^2} = \frac{4g(R(X,Y)Y,X)}{2 \cdot 2(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2)} = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями между разными видами тензора Римана-Кристоффеля и примерами из курса Тензорная алгебра (конец первой главы).

(Псевдо-)риманово многообразие M называется многообразием *постоянной кривизны в точке* p, если число $K_p(\pi)$ не зависит от выбора площадки π в этой точке. При этом число $K_p(\pi)$ обозначают $K(p)$ и называют *секционной кривизной* многообразия M в точке p.

(Псевдо-)риманово многообразие называется многообразием *точечно постоянной секционной кривизны*, если оно имеет постоянную секционную кривизну в каждой точке. (Псевдо-)риманово многообразие называется многообразием *глобально постоянной секционной кривизны*, если функция $K_p(\pi)$ является константой, то есть не зависит ни от двумерной площадки, ни от точки p.

Пример 3.3. Любое двумерное риманово многообразие является многообразием точечно постоянной секционной кривизны, так как его касательные пространства двумерны и двумерная площадка в каждой точке всего одна.

Как известно из классической дифференциальной геометрии, двумерное риманово многообразие является многообразием глобально постоянной секционной кривизны тогда и только тогда, когда они либо евклидова плоскость, либо плоскость Лобачевского, либо сфера. Из этого следует, что любое двумерное риманово многообразие, отличное от евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и сферы, является многообразием точечно постоянной, но не глобально постоянной секционной кривизны.

Очевидно, что многообразие M имеет точечно постоянную секционную кривизну тогда и только тогда, когда для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, для которых $X \wedge Y \neq 0$ в каждой точке $p \in M$ выполняется равенство

$$g(R(X,Y)Y,X) = K(p)(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2), \tag{3.2}$$

где $K(p)$ – некоторая гладкая функция на многообразии M. Значение функции $K(p)$ в каждой точке $p \in M$ равно кривизне этого многообразия в точке p.

Согласно классической теореме Шура в размерности выше 2 понятия точечно постоянной секционной кривизны и глобально постоянной секционной кривизны совпадают. Поэтому такие многообразия просто называют *многообразиями постоянной секционной кривизны* или *пространственными формами*. Вещественное число $K(p)$ обозначают просто K.

Известна полная классификация пространственных форм, а именно

Теорема 3.1. *Любая пространственная форма размерности свыше двух кривизны K локально изометрична одному из следующих многообразий*

1. *n-мерной сфере S^n, если $K > 0$;*
2. *n-мерному евклидову пространству E^n, если $K = 0$;*
3. *n-мерному пространству Лобачевского H^n, если $K < 0$ (в другой терминологии n-мерному гиперболическому пространству).*

1.4. Запишем критерий постоянства секционной кривизны в компонентах. Для этого нам нужно поляризовать тождество (3.2) (проще говоря, нужно чтобы все аргументы в этом соотношении были разными). Напомним, что выше мы определили ковариантный тензор Римана-Кристоффеля по формуле (2.33):

$$R(W,Z,X,Y) = g(W, R(X,Y)Z).$$

Также мы рассматривали в качестве примера тензора Бианки тензорное поле E, которое задавалось по формуле (2.36):

$$E(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z).$$

Используя эти тензорные поля мы можем переписать критерий (3.2) в виде

$$R(X,Y,X,Y) = KE(X,Y,X,Y).$$

Сначала заменим X на $X + Z$:

$$R(X,Y,Z,Y) + R(Z,Y,X,Y) = K(E(X,Y,Z,Y) + E(Z,Y,X,Y)).$$

Так как тензорные поля R и E являются тензорами Бианки, имеет место тождество $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$ и аналогичное для E. Применяем это тождество в нашем случае.

$$R(X,Y,Z,Y) = KE(X,Y,Z,Y).$$

Теперь заменяем Y на $Y+W$:

$$R(X,Y,Z,W) + R(X,W,Z,Y) = K(E(X,Y,Z,W) + E(X,W,Z,Y)). \tag{3.3}$$

Для дальнейшего упрощения этого равенства нам потребуется техническая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть H – тензор Бианки. Если $H(X,Y,Z,W) + H(X,W,Z,Y) = 0$, то $H(X,Y,Z,W) = 0$.*

Доказательство. Так как H – тензор Бианки, он удовлетворяет тождеству Риччи, то есть

$$H(X,Y,Z,W) + H(X,Z,W,Y) + H(X,W,Y,Z) = 0.$$

По условию имеем $H(X,Y,Z,W) + H(X,W,Z,Y) = 0$, то есть $H(X,Y,Z,W) = H(X,W,Y,Z)$. Подставим это равенство в тождество Риччи

$$2H(X,W,Y,Z) + H(X,Z,W,Y) = 0. \tag{3.4}$$

Поменяем в этом равенстве местами Z и W: $2H(X,Z,Y,W) + H(X,W,Z,Y) = 0$ или (кососимметричность тензора Бианки в парах индексов) $2H(X,Z,W,Y) + H(X,W,Z,Y) = 0$. Сравнивая это равенство с (3.4), получаем, что $H(X,Y,Z,W) = 0$. $\square$

Возвращаемся к равенству (3.3). Обозначим в нем $H(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - KE(X,Y,Z,W)$. Тензорное поле H будет тензором Бианки как линейная комбинация таковых. Тогда к нему применима доказанная лемма и мы получаем критерий постоянства секционной кривизны в виде

$$R(X,Y,Z,W) = K(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)).$$

Очевидно, что в компонентах этот критерий примет вид

$$R_{ij,k\ell} = K(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}).$$